

УДК 517.934

## О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С СУЩЕСТВОВАНИЕМ И ПОСТРОЕНИЕМ НЕУПРЕЖДАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

С. Ф. Николаев, Е. Л. Тонков

Изучается задача о равномерной локальной неупреждающей позиционной управляемости в нуль динамической системы, поведение которой описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений  $\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u$ ,  $u \in U$ . Предложен численный алгоритм построения неупреждающего управления, эффективность которого иллюстрируется на ряде модельных примеров.

### 1. Введение

Классическая задача об управляемости (полной управляемости, локальной управляемости, равномерной полной управляемости и т. д.) динамической системы, поведение которой описывается системой дифференциальных уравнений  $\dot{x} = v(t, x, u)$ , предполагает, что процесс управления (например процесс перехода из заданной точки  $x(t_0) = x_0$  в точку  $x(t_0 + \vartheta) = 0$  за время  $\vartheta$ ) осуществляется с помощью программных управлений  $u(t) = u(t, t_0, x_0)$ . В процессе построения программного управления всегда предполагается, что нам известно поведение динамической системы в будущем (т. е. при построении  $u(t)$  в точке  $t = \tau \in (t_0, t_0 + \vartheta)$  мы должны знать правую часть  $v(t, x, u)$  при всех  $t \in [t_0, t_0 + \vartheta]$ ). Во многих прикладных задачах требуется строить позиционное управление (т. е. управление вида  $u = u(t, x)$ ). Таким образом, возникает задача о позиционной управляемости в нуль: требуется построить такое  $u(t, x)$ , что всякое решение  $x(t, t_0, x_0)$  замкнутой системы  $\dot{x} = v(t, x, u(t, x))$  за конечное время  $\vartheta(t_0, x_0)$  переходит в нуль ( $x(t_0 + \vartheta(t_0, x_0), t_0, x_0) = 0$ ). Если при этом позиционное управление  $u = u(t, x)$  оказывается неупреждающим (т. е.  $u(t, x)$  строится в момент времени  $t = \tau$  только на основе информации о поведении системы при  $t \leq \tau$ ), то мы имеем задачу о позиционной неупреждающей управляемости в нуль.

В этой работе предпринята попытка построения неупреждающего позиционного управления  $u = u(t, x)$  для системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u$ ,  $u \in U$ , и выяснения условий, при которых имеет место равномерная локальная неупреждающая позиционная управляемость в нуль, т. е. для любого  $t_0$ , всякое решение  $x(t, t_0, x_0)$  (понимаемое в смысле А.Ф. Филиппова) замкнутой системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u(t, x)$  переходит в нуль за конечное время  $\vartheta(t_0, x_0)$ , не превосходящее заданного  $\vartheta$ , если норма  $|x_0|$  мала.

Идея построения неупреждающего управления достаточно проста. Управление  $u(t, x)$  в каждой точке  $(t, x)$  выбирается по принципу, близкому к принципу «экстремального прицеливания» (см. [1]). Мы выбираем  $u(t, x)$  в точке  $(t, x)$ , из соображений минимума угла, образованного ненулевым вектором  $X(0, t)x$  и непустым множеством  $X(0, t)B(t, x)U$ , где  $X(t, t_0)$  — матрица Коши системы  $\dot{x} = A(t)x$ . При этом в расширенном фазовом пространстве системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u(t, x)$  могут появиться инвариантные многообразия, двигаясь по которым решения Филиппова не входят в нуль за конечное время. Для того, чтобы избежать этого эффекта, приходится «в нужное время и в нужном месте» выключать управление (т. е. включать  $u(t, x) \equiv 0$ ). Тем самым возникают «поверхности стока», состоящие из скользящих режимов. Двигаясь по этим поверхностям, решения Филиппова приходят в нуль за конечное время.

Необходимо отметить, что в связи с большими трудностями, возникающими при теоретическом обосновании этого алгоритма, данная работа практически не содержит точных утверждений и строгих доказательств. Здесь основное внимание уделено разработке численных

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 97-01-00413 и 99-01-00454) и конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 97-0-1.9).

алгоритмов (с ними можно познакомиться по адресу <http://www.sam.orc.ru>; по этому же адресу расположена электронная копия данной статьи) и проверке этих алгоритмов на простых примерах (некоторые из них имеют прикладное содержание).

## 2. Основные обозначения и определения

Пусть  $\mathbb{R}^n$  — стандартное евклидово пространство размерности  $n$ ,  $|x| = \sqrt{x^*x}$  — норма в  $\mathbb{R}^n$  (звезда означает операцию транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись  $\xi x$  означает скалярное произведение векторов  $\xi$  и  $x$ );  $\mathcal{O}_\varepsilon^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq \varepsilon\}$ ,  $\mathcal{O}_\varepsilon^n = \mathcal{O}_\varepsilon^n(0)$ ,  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ . Для произвольного множества  $D \subset \mathbb{R}^n$  обозначим через  $\overline{D}$  замыкание,  $\text{int } D$  — внутренность  $D$  относительно  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv } D$  — замыкание выпуклой оболочки,  $\text{mes } D$  — меру Лебега,  $\mathcal{O}_\varepsilon^n(D)$  —  $\varepsilon$ -окрестность  $D$ .

Пространство  $\mathbb{M}(n, m)$  линейных операторов из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  будем отождествлять с пространством  $(n \times m)$ -матриц (если  $n = m$ , то пишем  $\mathbb{M}(n)$ );  $|A| = \max\{|Ax| : |x| = 1\}$  — норма в  $\mathbb{M}(n, m)$ . Для  $Q \in \mathbb{M}(n, m)$  обозначим  $\mathcal{B}_\varepsilon(Q) = \{H \in \mathbb{M}(n, m) : |H - Q| \leq \varepsilon\}$ ,  $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(0)$  (индексы  $m$  и  $n$  в обозначении  $\mathcal{B}_\varepsilon(Q)$ , а также индекс  $n$  у единичной матрицы  $I_n \in \mathbb{M}(n)$  будем опускать, если ясно о каком пространстве идет речь).

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (2.1)$$

где функция  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n)$  ограничена и равномерно непрерывна на прямой  $\mathbb{R}$ ; функция  $B : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$  допускает мажоранту  $|B(t, 0) - B(t, x)| \leq \ell|x|$  (для некоторого  $\ell > 0$  и всех  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ), равномерно непрерывна по  $t$  (равномерно относительно  $x$  на каждом компакте в  $\mathbb{R}^n$ ) и  $B(t, x) \neq 0$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ .

Относительно множества  $U$  будем предполагать, что  $U$  — выпуклый компакт и  $0 \in \text{int } U$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Система (2.1) называется равномерно локально управляемой, если существуют  $\varepsilon > 0$  и  $\vartheta > 0$  такие, что каждой точке  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon^n$  отвечает измеримое управление  $t \rightarrow u(t, t_0, x_0) \in U$ ,  $t_0 \leq t \leq t_0 + \vartheta$ , обеспечивающее следующее свойство: решение  $x(t, t_0, x_0)$ , системы (2.2) при управлении  $u = u(t, t_0, x_0)$  существует на отрезке  $[t_0, t_0 + \vartheta]$ , единственно и удовлетворяет условию  $x(t_0 + \vartheta, t_0, x_0) = 0$ . Управление  $u(t, t_0, x_0)$  называется программным управлением, отвечающим точке  $(t_0, x_0)$ .

**Лемма 1.** Если найдутся такие  $\vartheta > 0$  и  $\lambda > 0$ , что для всех  $t_0 \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство  $\lambda(t_0, \vartheta) \geq \lambda$ , где  $\lambda(t_0, \vartheta)$  — наименьшее собственное значение матрицы

$$W(t_0, \vartheta) = \int_{t_0}^{t_0 + \vartheta} X(t_0, t)B(t, 0)B^*(t, 0)X^*(t_0, t)dt,$$

то система (2.1) равномерно локально управляема.

Это утверждение может быть доказано с применением рассуждений, аналогичных доказательству теоремы о равномерной локальной управляемости по первому приближению [2].

Наряду с программными, будем рассматривать позиционные управления. Всякую измеримую функцию  $u : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow U$ , или ее сужения на множества вида  $[t_0, t_1] \times \mathcal{O}_r^n$ , будем называть позиционным управлением. Множество позиционных управлений обозначим  $\mathcal{U}$ . Пусть  $u(t, x)$  — произвольное позиционное управление. Решения  $x(t) = x(t, t_0, x_0)$  системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (2.2)$$

будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова [3] и называть  $\mathcal{F}$ -решениями системы (2.2). Напомним, что  $\mathcal{F}$ -решением системы (2.2) называется всякое абсолютно непрерывное решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t, x)\mathbf{U}(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad (2.3)$$

где многозначная функция  $(t, x) \rightarrow \mathbf{U}(t, x)$  определена равенством

$$\mathbf{U}(t, x) \doteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\text{mes } \mu = 0} \text{conv } u(\mathcal{O}_\varepsilon^{1+n}(t, x) \setminus \mu), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \quad (2.4)$$

**О п р е д е л е н и е 2.** Позиционное управление  $u(t, x)$  будем называть неупреждающим, если существует неупреждающий алгоритм построения  $u(t, x)$ , т.е. алгоритм, обладающий следующим свойством: для построения  $u(t, x)$  в точке  $(\tau, x)$  используется информация о матрицах  $A(t)$  и  $B(t, x)$  только при  $t \leq \tau$  (и не используется информация при  $t > \tau$ ). Пример: стационарное допустимое управление  $u(x)$  является неупреждающим.

**З а м е ч а н и е 1.** Термин «неупреждающее управление» заимствован у екатеринбургской (свердловской) школы по теории управления [1], [4].

**О п р е д е л е н и е 3.** Систему (2.1) будем называть позиционно локально управляемой, если существуют  $\varepsilon > 0$ ,  $\vartheta > 0$  и позиционное неупреждающее управление  $u(t, x)$  такие, что для любой точки  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon^n$  любое  $\mathcal{F}$ -решение  $x(t, t_0, x_0)$  системы (2.2) удовлетворяет условию  $x(t_0 + \vartheta(t_0, x_0), t_0, x_0) = 0$  при некотором  $\vartheta(t_0, x_0) \in [0, \vartheta]$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Отметим два обстоятельства, связанных с этим определением. Не исключена ситуация (и так часто бывает), что при некотором позиционном (возможно неупреждающем) управлении  $u(t, x)$  все решения Каратеодори ( $\mathcal{C}$ -решения) системы (2.2) переходят в нуль за конечное время, но при этом среди  $\mathcal{F}$ -решений системы (2.2) есть решения, не обращающиеся в нуль за конечное время (такое свойство наблюдается даже для стационарных систем, см., например, [5]–[9]). Во-вторых, в определении 3 не предполагается, что управление  $u(t, x)$  и время перехода  $\vartheta(t_0, x_0)$  оптимальны в смысле быстрогодействия. Для нестационарной системы, оптимальное в смысле быстрогодействия управление, построенное с применением принципа максимума Л. С. Понтрягина, вообще не может быть неупреждающим [6].

**Гипотеза.** Если система (2.1) равномерно локально управляема, то она позиционно локально управляема (т.е. локально управляема с помощью неупреждающего управления).

Это утверждение не доказано даже для линейных стационарных систем вида  $\dot{x} = Ax + Bu$ , где  $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ,  $2 \leq m < n$ ,  $|u| \leq 1$ ,  $\text{rank}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\} = n$ .

### 3. Неупреждающее управление

Всюду далее будем предполагать, что функции  $A(\cdot)$  и  $B(\cdot)$ , задающие систему (2.1), удовлетворяют следующим условиям невырожденности:

1. Функция  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n)$  ограничена и равномерно непрерывна на прямой  $\mathbb{R}$ ; функция  $B: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{M}(n, m)$  допускает мажоранту  $|B(t, 0) - B(t, x)| \leq \ell|x|$  (для некоторого  $\ell > 0$  и всех  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ), равномерно непрерывна по  $t$  (равномерно относительно  $x$  на каждом компакте в  $\mathbb{R}^n$ ) и  $B(t, x) \neq 0$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ .

2. Для любых  $\tau > 0$  и  $\varepsilon > 0$  найдется  $\lambda(\tau, \varepsilon) > 0$ , что для всякой непрерывной функции  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_\varepsilon^n$  и всех  $t_0 \in \mathbb{R}$  наименьшее собственное значение  $\lambda(t_0, \tau, x(\cdot))$  матрицы

$$W(t_0, \tau, x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} X(t_0, t)B(t, x(t))B^*(t, x(t))X^*(t_0, t)dt, \quad (3.1)$$

удовлетворяет неравенству  $\lambda(t_0, \tau, x(\cdot)) \geq \lambda(\tau, \varepsilon)$ .

Отметим, что при выполнении условий невырожденности, система (2.1) равномерно локально управляема (лемма 1), более того, она равномерно дифференциально управляема [7].

Пусть фиксировано  $\vartheta > 0$ , обозначим  $t_k = k\vartheta$ ,  $\theta_k = [t_k, t_{k+1})$ ,  $Q_k(t)$  — решение задачи

$$\dot{Q} = -A^*(t)Q - QA(t), \quad Q(t_k) = I, \quad (t, Q) \in \theta_k \times \mathbb{M}(n). \quad (3.2)$$

Отметим, что  $Q_k(t) = \Psi_k^*(t)\Psi_k(t)$ , где  $\Psi_k(t)$  — решение задачи  $\dot{\Psi} = -\Psi A(t)$ ,  $\Psi(t_k) = I$  и поэтому

$$\det Q_k(t) = \exp\left(-2 \int_{t_k}^t \text{Sp } A(s) ds\right) > 0, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad Q_k(t) = Q_k^*(t).$$

Определим кусочно непрерывную функцию  $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}(n)$  равенствами  $\Psi(t) \doteq \Psi_k(t)$  при  $t \in \theta_k$ . Аналогичным образом построим  $Q(t) \doteq \Psi^*(t)\Psi(t)$ . При необходимости будем подчеркивать, что  $\Psi$  и  $Q$  зависят от параметра  $\vartheta: \Psi_\vartheta, Q_\vartheta$ . Непосредственно из определения следует, что каждая из матриц  $\Psi, Q$  ограничена и имеет ограниченные на  $\mathbb{R}$  обратные матрицы  $\Psi^{-1}, Q^{-1}$ .

Для каждой точки  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , обозначим  $\mathfrak{c}(t, x)$  — косинус угла, образованного ненулевым вектором  $\Psi(t)x$  и непустым множеством  $\Psi(t)B(t, x)U$ . По определению

$$\mathfrak{c}(t, x) \doteq \min_{u \in U} \frac{x^* Q(t) B(t, x) u}{|\Psi(t)x| |\Psi(t)B(t, x)u|} = \frac{x^* Q(t) B(t, x) u(t, x)}{|\Psi(t)x| |\Psi(t)B(t, x)u(t, x)|}, \quad x \neq 0, \quad (3.3)$$

где  $u(t, x)$  — точка минимума в (3.3). В силу условия  $0 \in \text{int } U$ , для всех  $(t, x)$ ,  $x \neq 0$ , выполнено неравенство  $\mathfrak{c}(t, x) \leq 0$ .

Введем в рассмотрение измеримую функцию  $\delta: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1)$ , которую будем называть корректирующей, и рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x)\mathbf{u}_\delta(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (3.4)$$

$$\text{где } \mathbf{u}_\delta(t, 0) = 0, \quad \mathbf{u}_\delta(t, x) = \begin{cases} u(t, x), & \text{если } \mathfrak{c}(t, x) < -\delta(t, x), \\ 0 & , \quad \text{если } \mathfrak{c}(t, x) \geq -\delta(t, x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Построенное таким образом управление (3.5) определено для всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}$ , оно является позиционным, неупреждающим и зависит от двух параметров: константы  $\vartheta > 0$  и функции  $\delta(t, x)$ . Смысл этих параметров будет понятен из дальнейших рассуждений.

**Лемма 2.** Для всякой точки  $(t_k, x_k) \in \mathbb{R}^{1+n}$  множество

$$\mathcal{E}(t_k, x_k) \doteq \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}: t_k \leq t \leq t_{k+1}, \quad |\Psi_k(t)x| \leq |x_k| \}$$

положительно инвариантно относительно системы (3.4) (т. е. для всех  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  и всех  $\mathcal{F}$ -решений системы (3.4) имеет место включение  $(t, x(t)) \in \mathcal{E}(t_k, x_k)$ ).

**Доказательство.** Пусть  $v(t) \doteq \frac{1}{2}x^*(t)Q_k(t)x(t)$ , где  $x(t) = x(t, t_k, x_k)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= x^*Q_k(t)\dot{x} + \frac{1}{2}x^*(t)\dot{Q}_k(t)x(t) \leq \\ &\leq x^*(t)Q_k(t)A(t)x(t) - \frac{1}{2}x^*(t)(A^*(t)Q_k(t) + Q_k(t)A(t))x(t) + x^*(t)Q_k(t)B(t, x(t))\widehat{\mathbf{u}}_\delta(t, x(t)) = \\ &= \mathfrak{c}(t, x(t))|\Psi_k(t)x(t)||\Psi_k(t)B(t, x(t))\widehat{\mathbf{u}}_\delta(t, x(t))| = a_k(t)\sqrt{2v(t)}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}, \end{aligned}$$

где  $a_k(t) = \mathfrak{c}(t, x(t))|\Psi_k(t)B(t, x(t))\widehat{\mathbf{u}}_\delta(t, x(t))|$ ,  $\widehat{\mathbf{u}}_\delta(t, x(t))$  — измеримое сечение множества

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\text{mes } \mu = 0} \text{conv } \mathbf{u}_\delta(\mathcal{O}_\varepsilon^{1+n}(t, x(t)) \setminus \mu).$$

Поэтому  $|\Psi_k(t)x(t)| \leq |x_k| + \int_{t_k}^t a_k(s)ds \leq |x_k|$ ,  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ .

Из этой леммы следует в частности, что каждое  $\mathcal{F}$ -решение  $x(t, t_0, x_0)$  системы (3.4) определено на полуоси  $[t_0, \infty)$  и если наименьшее собственное значение  $\lambda_{\min}(t)$  матрицы  $Q(t)$  опускает при всех  $t \geq t_0$  оценку  $\lambda_{\min}(t) \geq 1$ , то  $|x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0|$ ,  $t \geq t_0$ .

#### 4 Свойства неупреждающего управления $u_\delta(t, x)$

На множестве  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  определим функции  $\gamma(t, z) \in [0, 1)$ ,  $H(t, z) \in \mathbb{M}(n, m)$  равенствами

$$\gamma(t, z) = \delta(t, X_0(t, t_k)z), \quad H(t, z) \doteq \Psi_k(t)B(t, X_0(t, t_k)z) \quad \text{при } t \in \theta_k.$$

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = H(t, z)\mathbf{v}_\gamma(t, z), \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (4.1)$$

$$\text{где } \mathbf{v}_\gamma(t, 0) = 0, \quad \mathbf{v}_\gamma(t, z) = \begin{cases} v(t, z), & \text{если } \mathfrak{C}(t, z) < -\gamma(t, z), \\ 0, & \text{если } \mathfrak{C}(t, z) \geq -\gamma(t, z), \end{cases}$$

а функция  $v(t, z)$  удовлетворяет условию минимума

$$\mathfrak{C}(t, z) \doteq \min_{v \in U} \frac{z^* H(t, z)v}{|z| |H(t, z)v|} = \frac{z^* H(t, z)v(t, z)}{|z| |H(t, z)v(t, z)|}, \quad z \neq 0. \quad (4.2)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что при всех  $t \in \theta_k$  имеет место равенство  $\mathbf{v}_\gamma(t, z) = \mathbf{u}_\delta(t, X_0(t, t_k)z)$  и на каждом из полуинтервалов  $\theta_k$  между  $\mathcal{F}$ -решениями систем (3.4) и (4.1) существует взаимно однозначное соответствие  $z(t) = \Psi_k(t)x(t)$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \beta(\varepsilon) &\doteq \max\{|H(t, z)| : (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon\}, \\ q(t, z) &= H^*(t, z)z, \quad \Omega(\varepsilon) \doteq \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon : q(t, z) \neq 0\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для упрощения выкладок будем далее предполагать, что

$$U = \mathcal{O}_r^m \quad \text{и} \quad \delta(t, x) \equiv \delta \in (0, 1). \quad (4.4)$$

Тогда  $\gamma = \delta$ ,

$$v(t, z) = \begin{cases} -rq(t, z)/|q(t, z)|, & (t, z) \in \Omega(\varepsilon), \\ 0, & (t, z) \notin \Omega(\varepsilon), \end{cases} \quad \mathfrak{C}(t, z) = -\frac{z^* H(t, z)q(t, z)}{|z| |H(t, z)q(t, z)|}, \quad z \neq 0. \quad (4.5)$$

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия невырожденности и условия (4.4). Тогда для каждого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для любой точки  $(t_0, z_0) \in S_-(\varepsilon, \delta)$ , где

$$S_-(\varepsilon, \delta) \doteq \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon^n : z^* H(t, z)q(t, z) - \delta|z| |H(t, z)q(t, z)| < 0\}, \quad (4.6)$$

точка  $(t, z(t, t_0, z_0))$  покидает многообразие  $S_-(\varepsilon, \delta)$  при движении  $t \rightarrow (t, z(t, t_0, z_0))$  за время, не превосходящее  $2\vartheta$ .

**Доказательство.** Пусть точка  $(t_0, z_0) \in S_-(\varepsilon, \delta)$  и  $(t, z(t)) \in S_-(\varepsilon, \delta)$  при всех  $t \in [t_k, t_k + \vartheta]$ , где  $z(t) = z(t, t_0, z_0)$ . Тогда  $\mathfrak{C}(t, x(t)) \geq -\delta$ ,  $\mathbf{v}_\gamma(t, z(t)) \equiv 0$  и  $z(t) \equiv z_0$ . Поэтому имеют место неравенства  $z_0^* H(t, z_0)H^*(t, z_0)z_0 < \delta|z_0| |H(t, z_0)H^*(t, z_0)z_0| \leq \delta|z_0|^2 |H(t, z_0)|^2$ , интегрируя которые, получим неравенства

$$z_0^* \int_{t_k}^{t_k + \vartheta} H(t, z_0)H^*(t, z_0)dt z_0 < \delta|z_0|^2 \int_{t_k}^{t_k + \vartheta} |H(t, z_0)|^2 dt \leq \delta\beta^2\vartheta|z_0|^2. \quad (4.7)$$

Отметим теперь, что  $\Psi_k(t) = X(t_k, t)$ , поэтому

$$\int_{t_k}^{t_k+\vartheta} H(t, z_0)H^*(t, z_0)dt = \int_{t_k}^{t_k+\vartheta} X(t_k, t)B(t, x_0(t))B^*(t, x_0(t))X^*(t_k, t)dt = W(t_k, \vartheta, x_0(\cdot)), \quad (4.8)$$

где  $x_0(t) = X(t, t_k)z_0$ . Далее, найдется константа  $a = a(\vartheta) > 0$ , что  $\max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |X(t, t_k)| \leq a$  для всех  $t_k$ . Поэтому  $|x_0(t)| \leq \varepsilon a$  и из (4.7), (4.8) и условий невырожденности следуют неравенства

$$0 < \lambda(\vartheta, \varepsilon a)|z_0|^2 \leq z_0^*W(t_k, \vartheta, x_0(\cdot))z_0 < \delta\beta^2(\varepsilon)\vartheta|z_0|^2,$$

или  $\lambda(\vartheta, \varepsilon a) < \delta\vartheta\beta^2(\varepsilon)$ , что не может быть выполнено при малых  $\delta > 0$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Из леммы 3 следует, что всякое движение  $t \rightarrow (t, z(t))$  системы (4.1), начинающееся в некоторый момент времени  $t_0$  на многообразии  $S_-(\varepsilon, \delta)$ , покидает это многообразие за время, не превосходящее  $2\vartheta$ . Через конечный промежуток времени точка  $(t, z(t))$  оказывается на многообразии

$$S_0(\varepsilon, \delta) \doteq \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon^n : z^*H(t, z)q(t, z) - \delta|z||H(t, z)q(t, z)| = 0\}. \quad (4.9)$$

Поскольку в это время  $z(t)$  не приближается к нулю, то желательно константу  $\vartheta$  выбрать по возможности маленькой, но при этом должно быть выполнено неравенство  $\delta\vartheta\beta^2(\varepsilon) \leq \lambda(\vartheta, \varepsilon a)$ . Поскольку  $\lambda(\vartheta, \varepsilon a)$  убывает при убывании  $\vartheta$ , то необходимо уменьшать  $\delta$ .

**Лемма 4.** Пусть выполнены условия невырожденности, условия (4.4) и для решения  $z(t) = z(t, t_k, z_0)$  системы (4.1) при  $t \in [t_k, t_k + \tau]$  имеет место включение  $(t, z(t)) \in S_+(\varepsilon, \delta)$ , где  $\tau \leq \vartheta$ ,

$$S_+(\varepsilon, \delta) \doteq \{(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathcal{O}_\varepsilon^n : z^*H(t, z)q(t, z) - \delta|z||H(t, z)q(t, z)| > 0\}. \quad (4.10)$$

Тогда: 1)  $q(t, z(t)) \in \Omega(\varepsilon)$  при всех  $t \in [t_k, t_k + \tau]$ ;

2) выполнено неравенство  $\int_{t_k}^{t_k+\tau} \alpha(t, z(t))dt > 0$ ,  $\tau \in (0, \vartheta]$ , где  $\alpha(t, z) = \frac{|H(t, z)q(t, z)|}{|q(t, z)|}$ ;

3) выполнено неравенство  $|z(t_k + \tau)| < |z(t_k)| - r\delta \int_{t_k}^{t_k+\tau} \alpha(t, z(t))dt$ ,  $\tau \in (0, \vartheta]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Включение  $q(t, z(t)) \in \Omega(\varepsilon)$  для всех  $t \in [t_k, t_k + \tau]$  следует из определения  $S_+(\varepsilon, \delta)$ . Далее, так как  $q(t, z(t)) \in S_+(\varepsilon, \delta)$ , то  $\mathfrak{C}(t, z(t)) < -\delta$  и управление

$\mathbf{v}_\delta(t, z(t)) = v(t, z(t)) = -r \frac{q(t, z(t))}{|q(t, z(t))|}$ . Поэтому  $z(t)$  является классическим решением системы

$$\dot{z} = -r \frac{H(t, z)q(t, z)}{|q(t, z)|}. \text{ Для } \rho(t) \doteq \frac{|z(t)|^2}{2} \text{ имеем: } \dot{\rho}(t) = z^*(t)\dot{z}(t) =$$

$$= -r \frac{z^*(t)H(t, z(t))q(t, z(t))}{|q(t, z(t))|} = r\mathfrak{C}(t, z(t))|z(t)| \frac{|H(t, z(t))q(t, z(t))|}{|q(t, z(t))|} < -r\delta\alpha(t, z(t))\sqrt{2\rho(t)}.$$

Таким образом,  $\rho(t)$  является решением неравенства  $\dot{\rho} < -r\delta\alpha(t, z(t))\sqrt{2\rho}$ , интегрируя которое получим неравенство

$$|z(t)| \leq |z(t_k)| - r\delta \int_{t_k}^t \alpha(s, z(s))ds, \quad t \in [t_k, t_k + \tau]. \quad (4.11)$$

Неравенство  $\int_{t_k}^{t_k+\tau} \alpha(t, z(t))dt > 0$  следует из включения  $(t, z(t)) \in S_+(\varepsilon, \delta)$ . Действительно, если  $\alpha(t, z(t)) \equiv 0$ , то  $H(t, z(t))q(t, z(t)) \equiv 0$  и  $(t, z(t)) \notin S_+(\varepsilon, \delta)$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Из леммы 4 следует, что любое решение  $z(t)$  системы (4.1), начинающее свое движение  $t \rightarrow (t, z(t))$  в некоторый момент времени  $t_k$  на многообразии  $S_+(\varepsilon, \delta)$ , «актуально» стремится к нулю и следовательно, через конечный промежуток время точка  $(t, z(t))$  оказывается на многообразии (4.9) (в силу определения  $S_+(\varepsilon, \delta)$ , решение  $z(t)$  не может обратиться в нуль до тех пор, пока точка  $(t, z(t))$  не покинет многообразие  $S_+(\varepsilon, \delta)$ ). Из (4.11) следует, что с увеличением константы  $\delta$  решение  $z(t)$  быстрее стремится к нулю и следовательно, точка  $(t, z(t))$  быстрее покидает  $S_+(\varepsilon, \delta)$ . Далее, при  $\delta = 0$  возможна ситуация, когда  $z(t)$  не стремится к нулю, или стремится к нулю асимптотически. Возможность такого поведения подтверждается простыми примерами (см. ниже, пример 3).

**Лемма 5.** Пусть выполнены условия невырожденности, условия (4.4) и для решения  $z(t) = z(t, t_k, z_0)$  системы (4.1) при  $t \in [t_k, t_k + \vartheta]$  имеет место включение  $(t, z(t)) \in S_0(\varepsilon, \delta)$ . Если константа  $\delta$  удовлетворяет неравенству  $\delta \leq \frac{\lambda(\vartheta, \varepsilon a)}{\beta^2(\varepsilon)\vartheta}$ , где  $a$  определено в доказательстве леммы 3,  $\beta(\varepsilon)$  — равенством (4.3), а  $\lambda(\vartheta, \varepsilon)$  — условиями невырожденности, то  $z(t) \neq \text{const}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** этого утверждения аналогично доказательству леммы 3. Действительно, если  $z(t) \equiv z_0$ ,  $z_0 \neq 0$ , то  $z_0^* H(t, z_0) H^*(t, z_0) z_0^* = \delta |z_0| |H(t, z_0) H^*(t, z_0) z_0|$ . Поэтому

$$\lambda(\vartheta, \varepsilon a) |z_0|^2 \leq z_0^* W(t_k, \vartheta, x_0(\cdot)) z_0 < \delta \beta^2(\varepsilon) \vartheta |z_0|^2$$

(см. (4.8)), что противоречит условию леммы.

Отметим теперь, что если  $(t, z(t)) \in S_0(\varepsilon, \delta)$ , при  $t \in [t_k, t_k + \vartheta]$ , то  $\mathfrak{C}(t, z(t)) = -\delta$ . Следовательно, по определению  $\mathcal{F}$ -решений, найдется функция  $\mu : S_0(\varepsilon, \delta) \rightarrow [0, 1]$  такая, что  $z(t)$  является решением системы  $\dot{z} = \mu(t, z(t))v_+(t, z) + [1 - \mu(t, z(t))]v_-(t, z)$ , где функции  $v_+(t, z) = -r \frac{H(t, z)q(t, z)}{|q(t, z)|}$ ,  $v_-(t, z) = 0$ . Поэтому,  $z(t)$  является решением системы

$$\dot{z} = -r\mu(t, z(t)) \frac{H(t, z)q(t, z)}{|q(t, z)|}, \quad (t, z) \in S_0(\varepsilon, \delta), \quad t \in [t_k, t_k + \vartheta].$$

Из леммы 5 следует, что  $\mu(t, z(t))\alpha(t, z(t)) \neq 0$ , где  $\alpha(t, z) = \frac{H(t, z)q(t, z)}{|q(t, z)|}$  (в противном случае  $z(t) \equiv \text{const}$ ). Проведя для  $\rho(t) \doteq \frac{|z(t)|^2}{2}$  рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве леммы 4, получим неравенство

$$|z(t_k + \vartheta)| \leq |z(t_k)| - r\delta \int_{t_k}^{t_k + \vartheta} \mu(t, z(t))\alpha(t, z(t))dt, \quad (4.12)$$

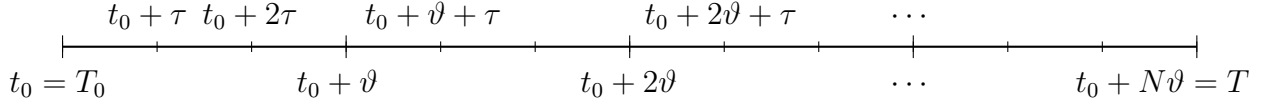
причем имеет место неравенство  $\int_{t_k}^{t_k + \vartheta} \mu(t, z(t))\alpha(t, z(t))dt > 0$ .

**Лемма 6.** Пусть выполнены условия невырожденности, условия (4.4) и для  $\mathcal{F}$ -решения  $z(t) = z(t, t_k, z_0)$  системы (4.1) при  $t \in [t_k, t_k + \vartheta]$  имеет место включение  $(t, z(t)) \in S_0(\varepsilon, \delta)$ . Тогда если  $\delta \leq \frac{\lambda(\vartheta, \varepsilon a)}{\beta^2(\varepsilon)\vartheta}$ , то  $z(t)$  удовлетворяет неравенству (4.12).

**Выводы.** Приведенных здесь рассуждений не достаточно для того, чтобы можно было утверждать наличие позиционной локальной управляемости в нуль системы (2.1). Верно однако, что все  $\mathcal{F}$ -решения системы (4.1), начинающиеся вблизи нуля, стремятся, причем «достаточно быстро» к нулю. Рациональный выбор константы  $\vartheta$  и функции  $\delta(t, x)$  улучшает такое стремление к нулю и возможно приводит решения в нуль за конечное время. Это подтверждается многочисленными примерами. В прикладном же смысле предложенный процесс управления системой (2.1) имеет некоторые очевидные преимущества и его свойства еще предстоит изучить более внимательно.

## 5. Описание численного алгоритма построения неупреждающего управления

Описанное выше неупреждающее управление для системы (2.1), допускает численную реализацию, алгоритм которой описан ниже. Суть этого алгоритма сводится к выбору на каждом шаге некоторого фиксированного разбиения испытательного отрезка  $[T_0, T]$ , управления  $\mathbf{u}_\delta(t, x)$  и последующему решению замкнутой системы (3.4) на этом шаге. В качестве множества допустимых управлений  $U$  принимается многоугольник  $U = \text{conv}\{u_1, \dots, u_\ell\}$ ,  $u_i \in \mathbb{R}^m$ , имеющий  $\ell$  вершин и содержащий нуль внутри себя.



**Рис. 1.** Разбиение испытательного отрезка  $[T_0, T]$

Обозначим  $[t_0 + k\vartheta, t_0 + (k+1)\vartheta)$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  ( $N$  — параметр алгоритма) разбиение испытательного отрезка  $[T_0, T]$  на  $N$  частей (см. рис. 1). Здесь  $T_0 = t_0$ ,  $T = t_0 + N\vartheta$ . Далее, для каждого  $k = 0, \dots, N-1$  введем разбиение

$$[t_0 + k\vartheta + j\tau, t_0 + k\vartheta + (j+1)\tau], \quad j = 0, \dots, N_\vartheta - 1,$$

где  $N_\vartheta \geq 1$  — еще один параметр алгоритма. Как правило,  $N_\vartheta = 1$ , но для некоторых систем имеет смысл увеличить параметр  $N_\vartheta$ , чтобы получить более точный результат. Остальные параметры метода имеют следующий смысл: параметр  $\varepsilon_0$  — если решение управляемой системы попало в окрестность нуля  $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}^n$ , то считаем процесс завершенным;  $\zeta$  — погрешность численного решения задачи Коши на одном шаге;  $\delta$  — начальное значение корректирующей функции  $\delta(t, x)$ . Это значение может быть изменено посредством алгоритма адаптации, описанного далее. Если алгоритм адаптации не используется, то полагаем  $\delta(t, x) \equiv \delta$ . В дальнейших рассуждениях индекс  $k$  временно фиксирован. Для каждого  $i = 1, \dots, \ell$  построим решение системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u_i \quad (5.1)$$

(здесь и далее  $u_i$  —  $i$ -я вершина многоугольника  $U$ ) с начальным условием  $x = x(t_0 + k\vartheta)$  в точке  $t_0 + k\vartheta + \tau$ . Решения системы (5.1) могут быть вычислены с точностью, уступающей  $\zeta$  (по сути достаточно выполнить один шаг  $\tau$  без контроля погрешности), поскольку они будут использованы далее лишь для принятия решения о выборе  $u_i$ . Подставив полученные решения  $x_i \doteq x(t_0 + k\vartheta + \tau)$  в (3.3), получим  $\ell$  величин

$$\mathbf{c}_i(t_0 + k\vartheta + \tau, x_i) = \frac{x_i^* Q(t_0 + k\vartheta + \tau) B(t_0 + k\vartheta + \tau, x_i) u_i}{|\Psi(t_0 + k\vartheta + \tau) x_i| |\Psi(t_0 + k\vartheta + \tau) B(t_0 + k\vartheta + \tau, x_i) u_i|},$$

из которых выберем минимальную и обозначим её индекс  $i_{\min}$ . Здесь  $\Psi(t_0 + k\vartheta + \tau)$  — решение матричного уравнения  $\dot{\Psi} = -\Psi A(t)$  с начальным условием  $\Psi(t_0 + k\vartheta) = I$ . Далее, полагаем

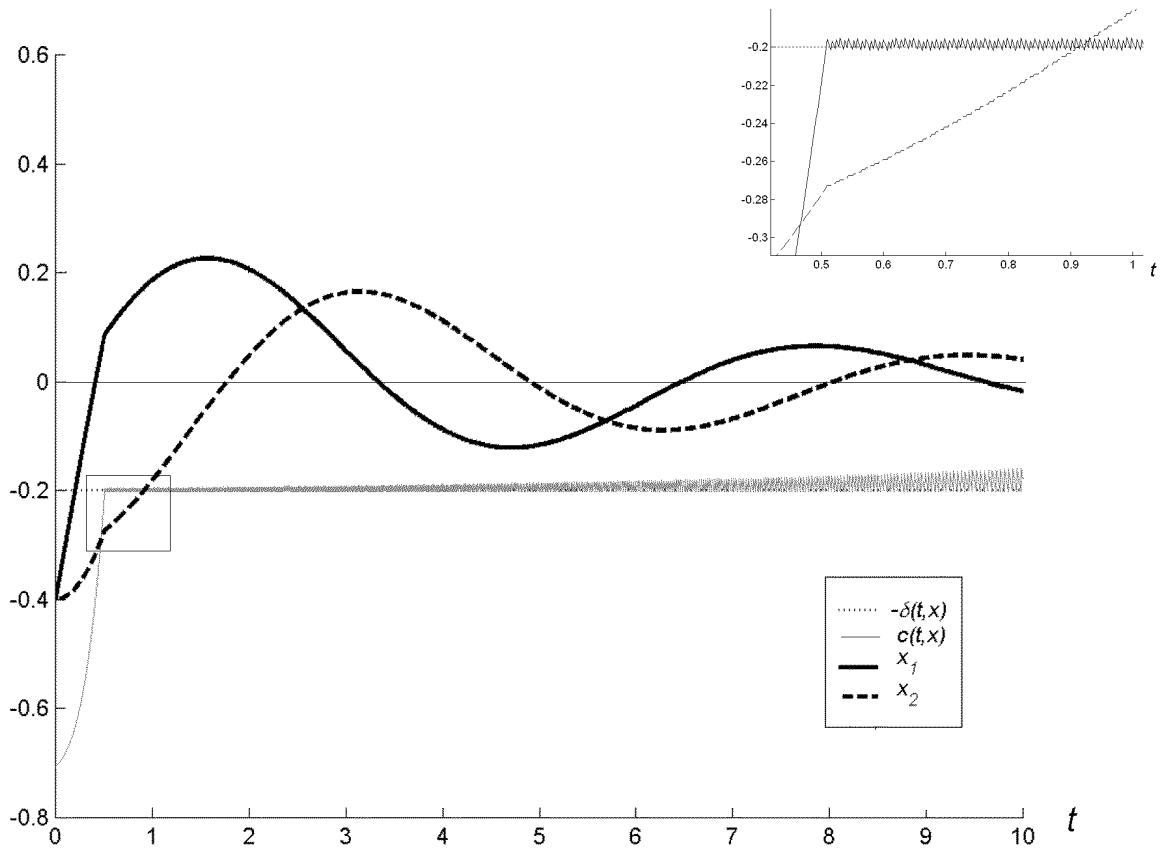
$$\mathbf{u}_\delta = \begin{cases} u_{i_{\min}}, & \text{если } \mathbf{c}_{i_{\min}}(t_0 + k\vartheta + \tau, x_{i_{\min}}) < -\delta(t_0 + k\vartheta + \tau, x_{i_{\min}}) \\ 0, & \text{если } \mathbf{c}_{i_{\min}}(t_0 + k\vartheta + \tau, x_{i_{\min}}) \geq -\delta(t_0 + k\vartheta + \tau, x_{i_{\min}}) \end{cases}$$

(о нахождении значения корректирующей функции  $\delta(t_0 + k\vartheta + \tau, x_{i_{\min}})$  будет сказано далее при описании алгоритма адаптации) и находим решение замкнутой системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x)\mathbf{u}_\delta \quad (5.2)$$

с начальным условием  $x = x(t_0 + k\vartheta)$  в точке  $t_0 + k\vartheta + \tau$ . Здесь и далее для краткости записи не указывается зависимость (дискретная) величины  $\mathbf{u}_\delta$  от времени  $t$  и параметров  $k$  и  $\tau$ . При нахождении этого решения используется контроль погрешности на каждом шаге численного





**Рис. 2.** Результат применения общего алгоритма для системы (5.3) при значениях параметров  $N = 5000$ ,  $N_\vartheta = 1$ ,  $\delta(t, x) \equiv 0.2$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T = 10$ .

интегрирования по правилу Рунге, погрешность на шаге не превышает  $\zeta$ . Полученное решение  $x(t_0 + k\vartheta + \tau)$  является аппроксимацией искомого состояния системы (под действием неупреждающего управления  $\mathbf{u}_\delta$ ) в момент времени  $t_0 + k\vartheta + \tau$ . Если оказалось, что  $|x(t_0 + k\vartheta + \tau)| < \varepsilon_0$ , то останавливаем процесс. Если  $N_\vartheta > 1$ , продолжаем описанный процесс для  $j = 1, \dots, N_\vartheta - 1$ . При этом матрица  $\Psi(t_0 + k\vartheta + (j+1)\tau)$  является решением матричного уравнения  $\dot{\Psi} = -\Psi A(t)$  с начальным условием  $\Psi = \Psi(t_0 + k\vartheta + j\tau)$ .

Расфиксируем  $k$  и выполним описанную процедуру для всех  $k = 0, \dots, N - 1$ , полагая, что  $\Psi(t_0 + k\vartheta) = I$ . Полученные таким образом  $N \cdot N_\vartheta$  решений  $x(t)$  (или их меньшее количество в случае достижения окрестности  $\mathcal{O}_{\varepsilon_0}^n$ ) и будут являться результатом работы алгоритма. Описанный алгоритм будем называть **общим алгоритмом**.

Применим общий алгоритм к системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\cos t)u, \\ \dot{x}_2 = (\sin t)u, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad (5.3)$$

где  $x_1(t_0) = -1$ ,  $x_2(t_0) = -2$  (см. ниже пример 3) при следующих значениях параметров:  $N = 5000$ ,  $N_\vartheta = 1$ ,  $\delta(t, x) \equiv 0.2$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T = 10$ .

На рис. 2 проиллюстрировано следующее явление, которое может возникнуть при применении общего алгоритма, — функция  $t \rightarrow \mathbf{c}_{i_{\min}}(t_0 + k\vartheta + j\tau, x_{i_{\min}})$  в подобных примерах начинает осциллировать вдоль прямой  $\mathbf{c} = -\delta$  с частотой в один шаг. Здесь мы имеем дело с численной аппроксимацией режима скольжения, — т.е. неизменности угла между вектором  $\Psi(t)x$  и множеством  $\Psi(t)B(t, x)U$ , сопровождающейся движением (в некоторых случаях медленным) решения системы к нулю. Это движение можно ускорить при помощи алгоритма адаптации

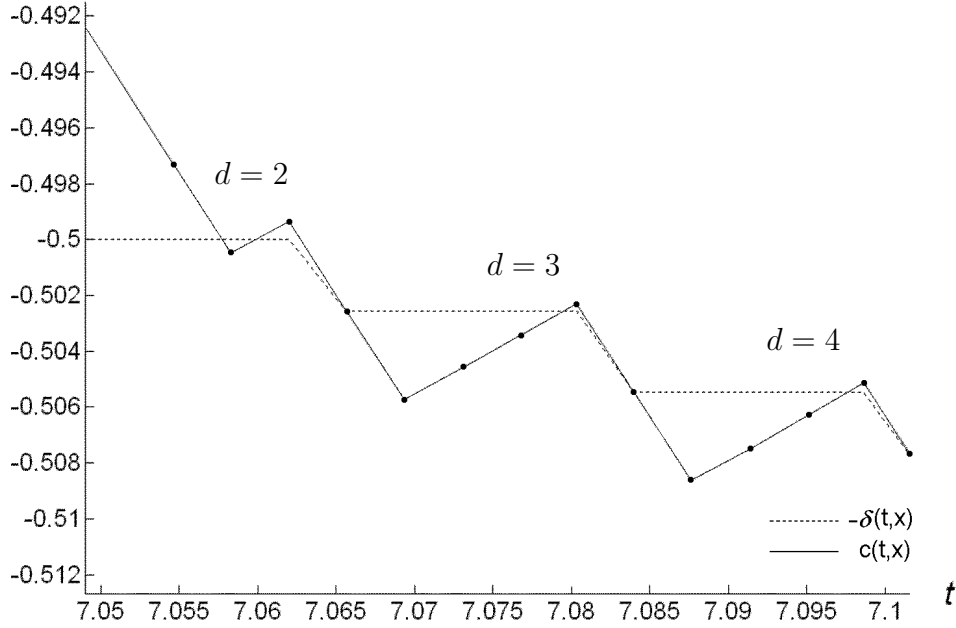


Рис. 3. Адаптация корректирующей функции

корректирующей функции  $t \rightarrow \delta(t, x)$ , увеличивающего угол  $\arccos(-\delta(t, x))$ , вдоль которого происходит скольжение.

**З а м е ч а н и е 5.** На рисунках, где встречаются обозначения  $\delta(t, x)$ ,  $c(t, x)$  или  $\omega(t, x)$ , все эти функции вычисляются вдоль заданного решения  $x(t)$ , в окрестности которого строится неупреждающее управление. Следовательно, на соответствующих рисунках изображены графики функций  $t \rightarrow \delta(t, x(t))$ ,  $t \rightarrow c(t, x(t))$ ,  $t \rightarrow \omega(t, x(t))$ .

Далее приводится описание алгоритма адаптации корректирующей функции. Этот неупреждающий алгоритм является попыткой численной аппроксимации корректирующей функции на основе статистических данных о поведении функции  $t \rightarrow c_{i_{\min}}(t_0 + k\vartheta + j\tau, x_{i_{\min}})$  на предыдущих шагах общего алгоритма.

Будем называть положительным переключением изменение значения неупреждающего управления  $u_{\delta}(t, x_{i_{\min}})$  с 0 на  $u_{i_{\min}}$  и отрицательным переключением изменение значения неупреждающего управления  $u_{\delta}(t, x_{i_{\min}})$  с  $u_{i_{\min}}$  на 0 (переключения с  $u_{i_1}$  на  $u_{i_2}$  так же могут иметь место, но в данном случае они не принимаются во внимание). Определим счетчик  $d$  и положим  $d = 2$  в момент времени  $t_0$ . Если на каком-то шаге  $[t_0 + k\vartheta + j\tau, t_0 + k\vartheta + (j+1)\tau]$  обнаруживается, что  $u_{\delta}$  совершает положительное (отрицательное) переключение и при этом на предыдущих  $d$  шагах положительных (отрицательных) переключений было больше, чем отрицательных (положительных), то полагаем  $\delta(t_0 + k\vartheta + j\tau, x_{i_{\min}}) = |c_{i_{\min}}(t_0 + k\vartheta + j\tau, x_{i_{\min}})|$ . При изменении значения корректирующей функции увеличиваем значение счетчика  $d$  на единицу (см. рис. 3).

На рис. 4 приведен результат применения общего алгоритма в сочетании с алгоритмом адаптации к системе из примера 3 при тех же значениях параметров:  $N = 5000$ ,  $N_{\vartheta} = 1$ ,  $\delta(t_0, x_0) = 0.2$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T = 10$ .

Как видно из рис. 4, применение алгоритма адаптации позволяет в некоторых случаях сократить время управления. С другой стороны, известны примеры, когда применение этого алгоритма не влияет на время управления и даже увеличивает таковое. Тем не менее, этот алгоритм может быть полезен при принятии решения о начальном значении корректирующей функции (например, с целью последующего применения в бортовых компьютерах и прочих управляющих устройствах).

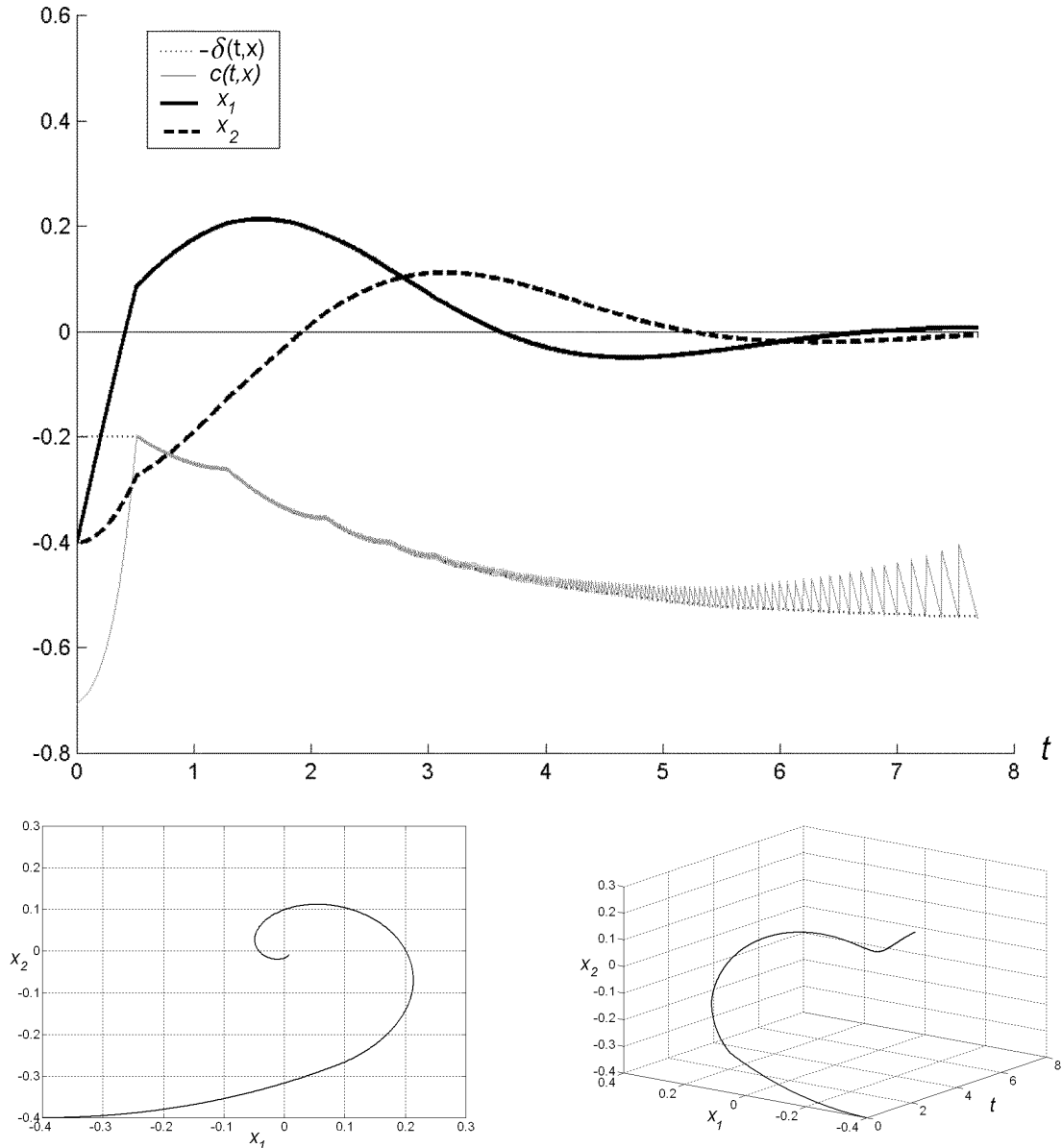
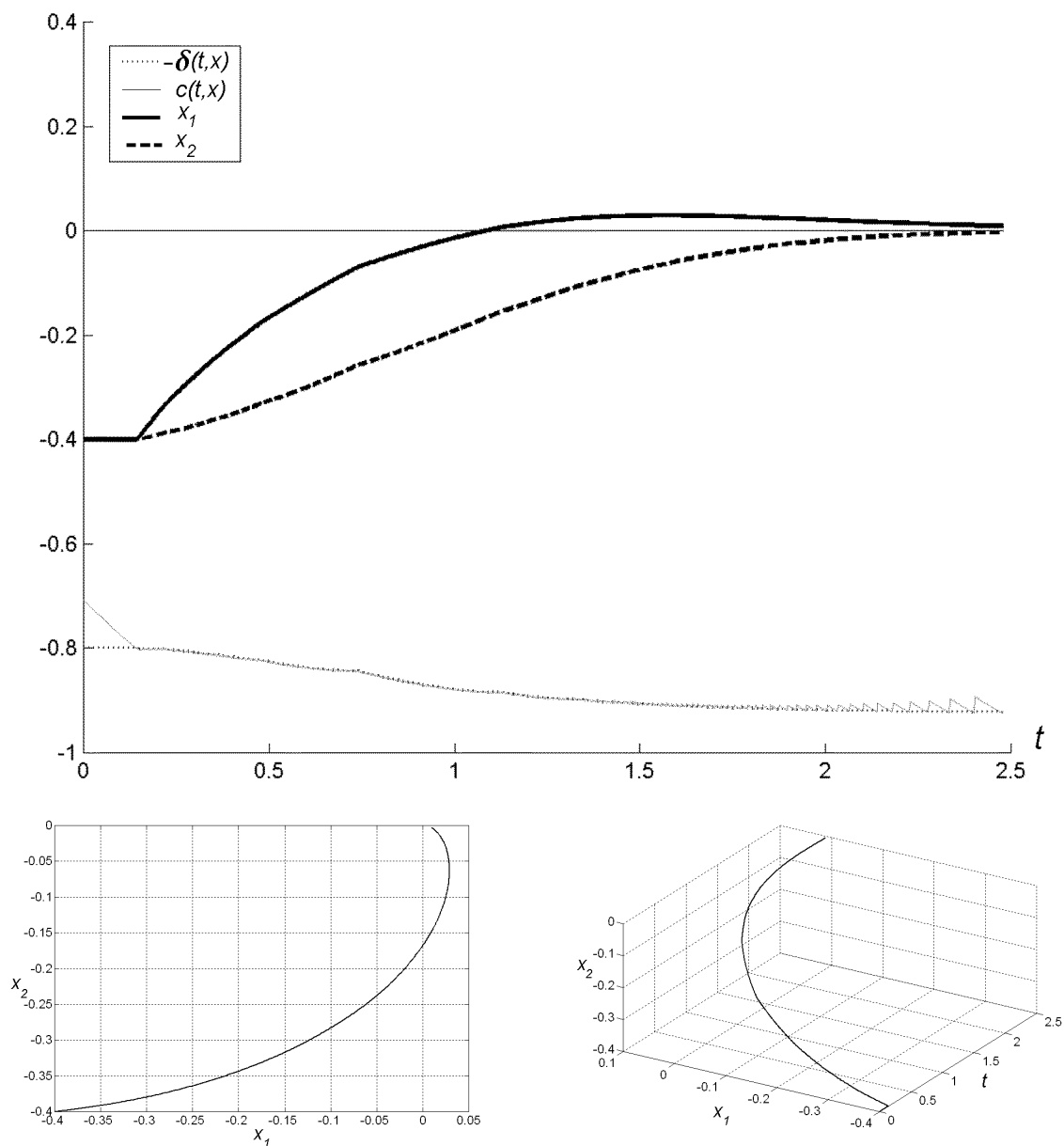


Рис. 4. Результат применения общего адаптированного алгоритма для системы (5.3) при  $N = 5000$ ,  $N_\vartheta = 1$ ,  $\delta(0, 0) = 0.2$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T = 10$ .

В самом деле, применим алгоритма адаптации к системе (5.3), положив  $\delta(t_0, x_0) = 0.8$  Это достаточно большое число (в предыдущем случае мы брали  $\delta(t_0, x_0) = 0.2$  и не включали алгоритм адаптации). Оказывается тогда, что время движения к нулю сокращается примерно в три раза (см. рис. 5). Такое сокращение времени перехода достигается как за счет правильного выбора  $\delta(t_0, x_0)$ , так и за счет алгоритма адаптации.

Наконец, при применении алгоритма адаптации корректирующей функции может возникнуть следующая ситуация: после очередного увеличения  $\delta(t, x_{i_{\min}})$  на длительном участке времени сохраняется неравенство  $c_{i_{\min}}(t, x_{i_{\min}}) > -\delta(t, x_{i_{\min}})$  и, как следствие,  $\mathbf{u}_\delta = 0$ . Если при этом среди показателей Ляпунова  $\lambda_i(A)$  системы  $\dot{x} = A(t)x$  есть неотрицательные, то не все решения системы (5.2) стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Для исправления такой ситуации служит еще один параметр метода  $d_s$ , равный количеству шагов, в течении которого допускается выполнение  $\mathbf{u}_\delta = 0$ ; после чего значение корректирующей функции делится на два.

Далее, пусть в системе (2.1)  $A(t) = 0$  и  $m = 1$ . В этом случае можно, не ограничивая



**Рис. 5.** Результат применения общего адаптированного алгоритма для системы (5.3) при  $N = 5000$ ,  $N_\vartheta = 1$ ,  $\delta(t_0, x_0) = 0.8$ ,  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $T_0 = 0$ ,  $T = 10$ .

общности, полагать  $U = [-1, 1]$ . Система (2.1) принимает вид  $\dot{x} = b(t, x)u$ ,  $|u| \leq 1$ , при этом  $\Psi(t) \equiv I$  и  $c(t, x) = -\frac{|x^*b(t, x)|}{|x||b(t, x)|}$ . Следовательно, описанный выше общий алгоритм допускает следующее упрощение. Введем обозначение

$$\text{sat}_\delta x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > \delta, \\ 0, & \text{если } |x| \leq \delta, \\ -1, & \text{если } x < -\delta. \end{cases}$$

Далее, пусть

$$\omega(t, x) \doteq \frac{x^*b(t, x)}{|x||b(t, x)|}.$$

Тогда  $c(t, x) = -|\omega(t, x)|$  и следовательно неравенство  $c(t, x) \geq -\delta(t, x)$  переходит в неравенство  $|\omega(t, x)| \leq \delta(t, x)$ , а неравенство  $c(t, x) < -\delta(t, x)$  — в неравенство  $|\omega(t, x)| > \delta(t, x)$ . Следовательно, управление отключено (тождественно равно нулю), если  $|\omega(t, x)| \leq \delta(t, x)$  и включено, если  $|\omega(t, x)| > \delta(t, x)$ .

В качестве управления  $u_\delta$ , используемого при решении замкнутой системы  $\dot{x} = b(t, x)u_\delta$ , будем полагать  $u_\delta(t, x) = -\text{sat}_{\delta(t, x)} \omega(t, x)$ . Полученный алгоритм назовем упрощенным.

Описанные выше численные алгоритмы реализованы на языке программирования высокого уровня MATLAB. Процедуры численного интегрирования замкнутой системы (5.2) и матричного уравнения  $\dot{\Psi} = -\Psi A(t)$  реализованы на языке ФОРТРАН в виде тех-расширений среды MATLAB. При этом, в силу того, что язык MATLAB является интерпретируемым, скорость вычислений недостаточно высока (но достаточна для получения приведенных далее иллюстраций). При применении алгоритма к конкретным системам, очевидно, следует использовать низкоуровневые языки. Все приведенные в статье примеры, а также сами алгоритмы, запрограммированные в виде m-файлов и тех-расширений, могут быть свободно загружены из сети Интернет по адресу <http://www.sam.orc.ru>.

## 6. Модельные примеры

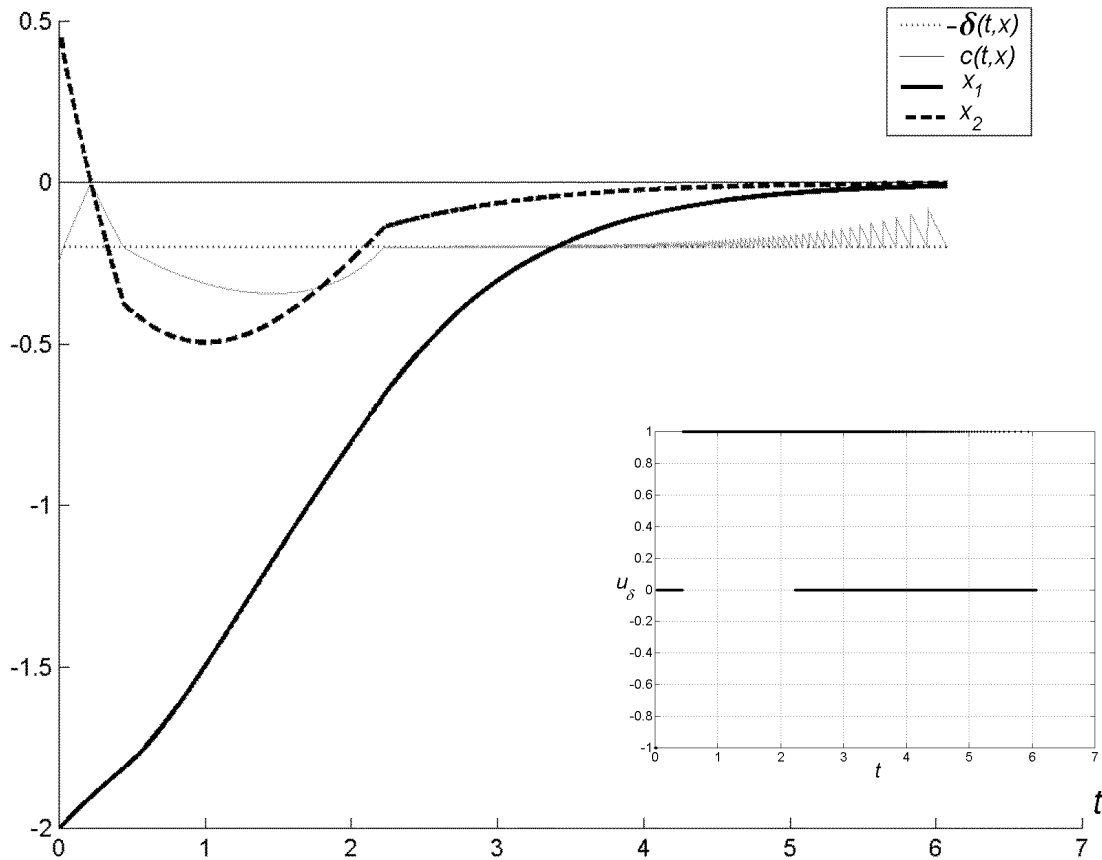


Рис. 6. Графики управляющей функции и решений системы из примера 1.

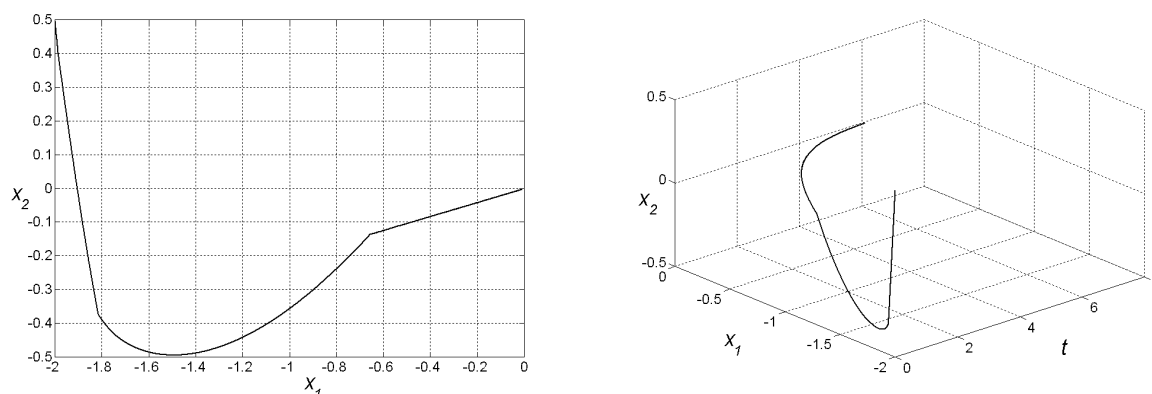


Рис. 7. Фазовый портрет системы из примера 1.

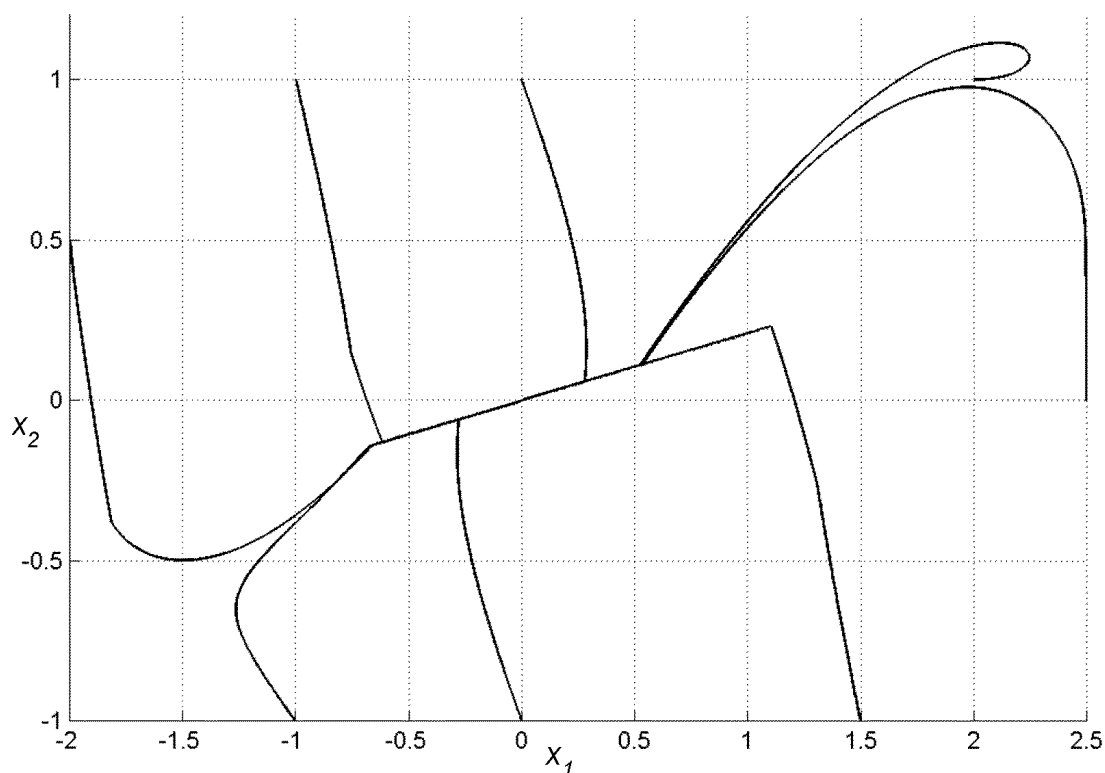


Рис. 8. Результат применения общего адаптированного алгоритма для системы из примера 1 при разных начальных условиях  $x(t_0)$ .

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(\arctg t)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - (\cos \frac{t}{10})x_2 + u, \end{cases} \quad (6.1)$$

где  $|u| \leq 1$ . Так как в этом примере матрица Коши однородной системы явно не строится, то эффективная проверка условий невырожденности для системы (6.1) затруднительна. Поэтому мы будем численно строить соответствующее неупреждающее управление без проверки условий невырожденности (обычно мы будем так поступать и в других случаях).

Численные эксперименты показывают, что в этом примере адаптация корректирующей функции мало эффективна, поэтому она не используется. На рис. 6 (см. замечание 5) и 7 показан результат применения общего алгоритма для системы (6.1) при значениях параметров

$$N = 5000, N_\vartheta = 1, \delta(t, x) \equiv 0.2, \varepsilon_0 = 0.01, T_0 = 0, T = 7, x_1(t_0) = -2, x_2(t_0) = 0.5,$$

а на рис. 8 — фазовый портрет системы (6.1).

Здесь и далее кажущаяся неоднозначная зависимость  $t \rightarrow \mathbf{u}_\delta$  обусловлена сильной осцилляцией управляющей функции на некоторых промежутках времени (что соответствует движению по поверхности разрыва правой части системы при неупреждающем управлении).

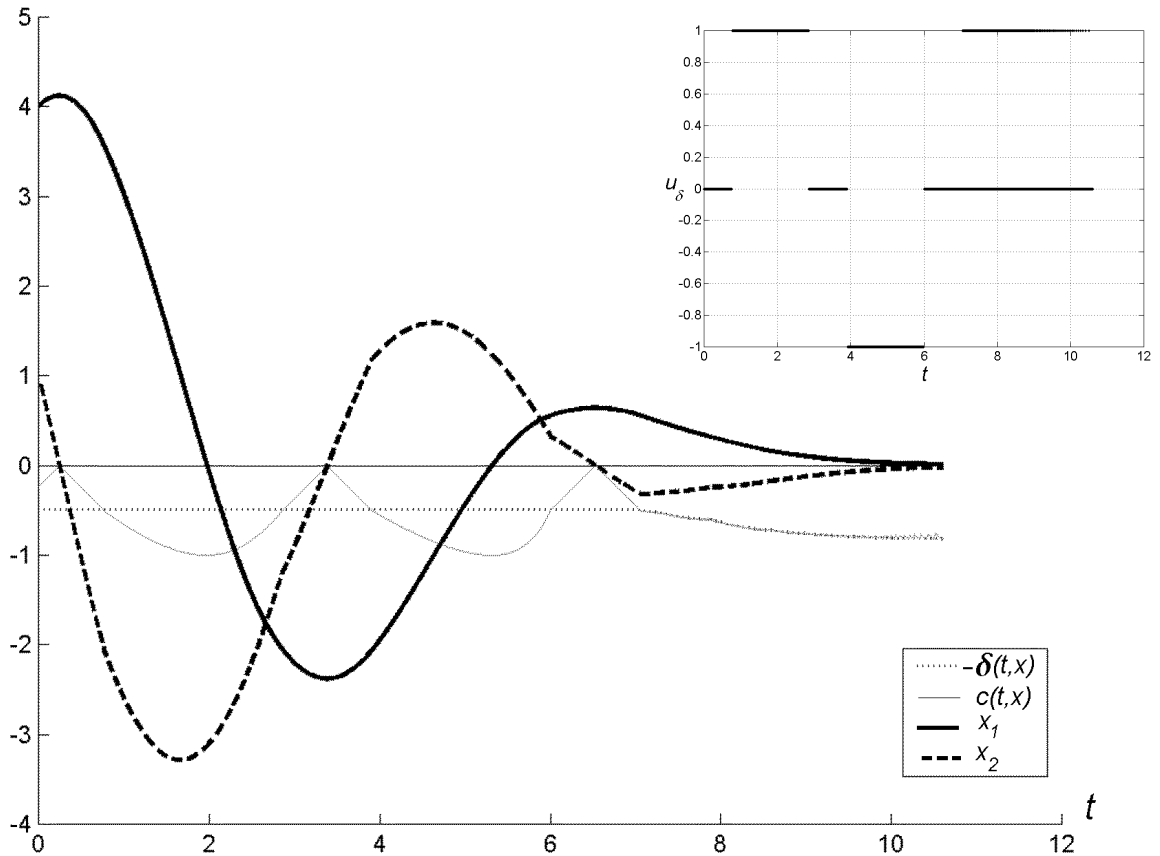


Рис. 9. Графики управляющей функции и решений системы из примера 2.

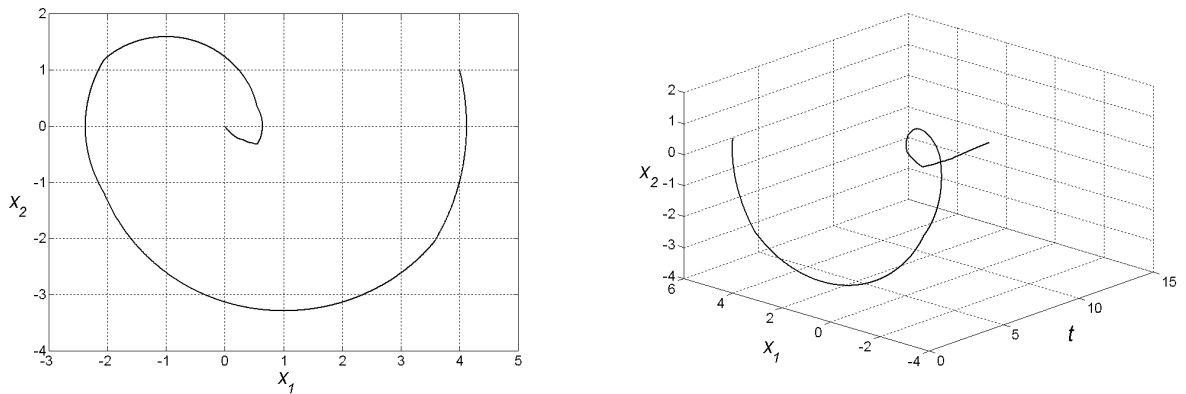
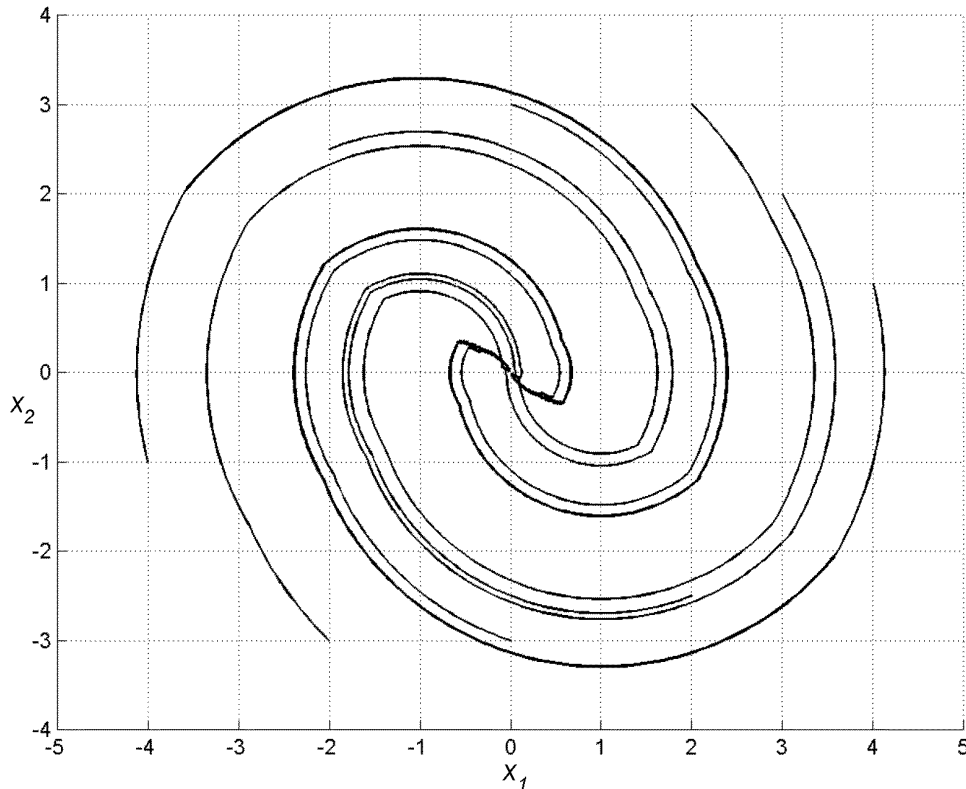


Рис. 10. Фазовый портрет системы из примера 2.



**Рис. 11.** Результат применения общего адаптированного алгоритма для системы из примера 2 при разных начальных условиях  $x(t_0)$ .

**Пример 2.** Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $|u| \leq 1$ , хорошо изучена. Легко проверить, что эта система удовлетворяет условиям невырожденности и для нее существует позиционное управление  $u(x)$ , оптимальное в смысле быстродействия. Такое управление построено в [10] (правда в [10] не говорится об  $\mathcal{F}$ -решениях, но можно показать [6], что именно  $\mathcal{F}$ -решения системы, замкнутой управлением  $u(x)$ , переходят в нуль оптимально в смысле быстродействия). Поскольку  $u(x)$  не зависит от  $t$ , то  $u(x)$  — неупреждающее управление.

Управление, построенное в этой статье, не совпадает с  $u(x)$  и поэтому не является оптимальным в смысле быстродействия. На рис. 9 и 10 показан результат применения общего адаптированного алгоритма для системы (6.2) при значениях параметров

$$N = 3000, N_\vartheta = 1, \delta(0, x(0)) = 0.5, \varepsilon_0 = 0.02, d_s = 1000, T_0 = 0, T = 11, x_1(0) = 4, x_2(0) = 1,$$

а на рис. 11 фазовый портрет системы (6.2). На рис. 11 отчетливо видна линия (содержащая начало координат), на которую приходят все траектории. Эта линия является линией скольжения траекторий и движение по этой линии происходит под действием управления  $\hat{u}(t) \doteq \mathbf{u}_\delta(t, x(t))$ , имеющего бесконечное число переключений (таким образом возникает режим, близкий к так называемому четтеринг-режиму [11]). Такое поведение управления  $\hat{u}(t)$  существенно отлично от поведения управления  $u(t, x(t))$ , оптимального в смысле быстродействия. Управление  $u(t, x(t))$  вообще не имеет переключений на заключительном участке движения. Возникающая в этом примере ситуация достаточно типична, во всяком случае она всегда проявляется в тех примерах, где нельзя требовать  $\delta(t, x) \equiv 0$ .



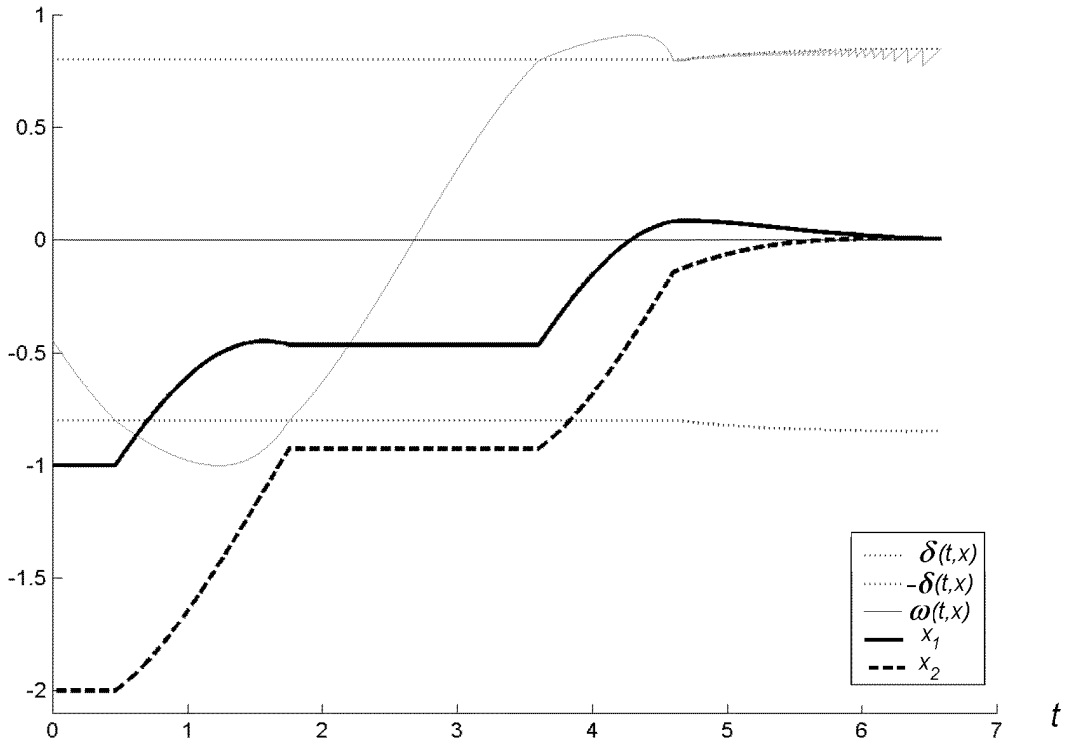


Рис. 12. Графики решений системы из примера 3.

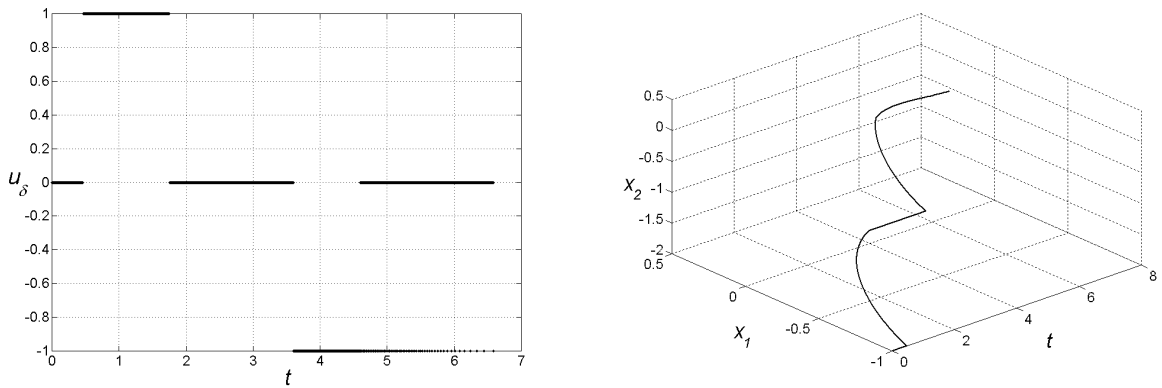


Рис. 13. График управляющей функции и фазовый портрет системы из примера 3.

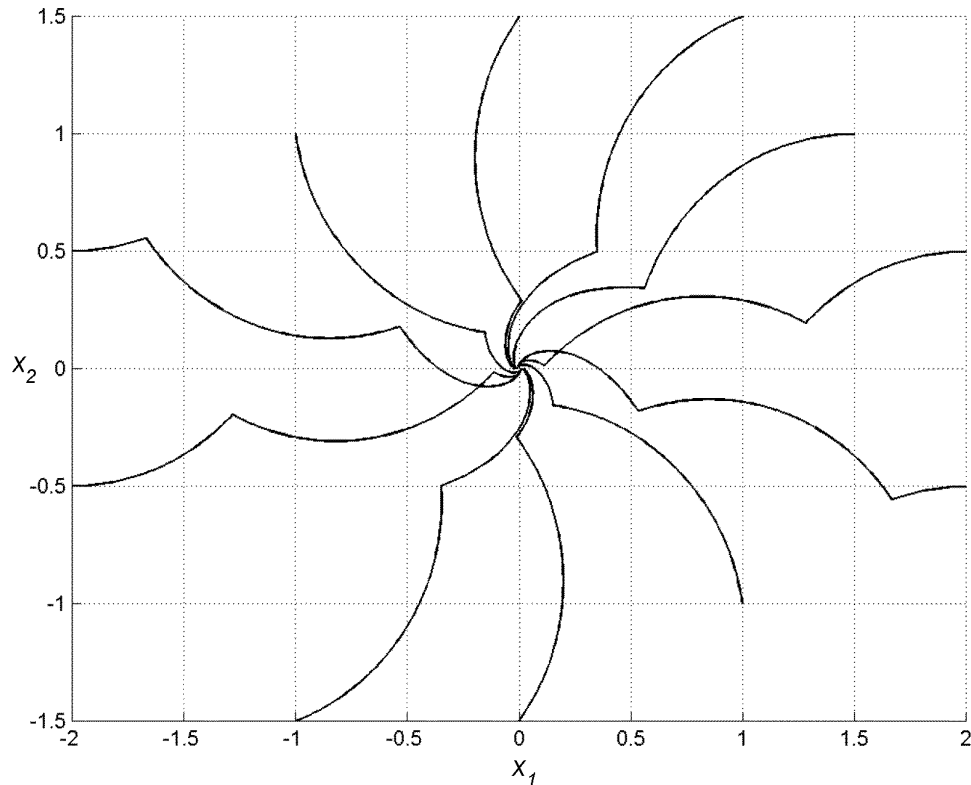
Пример 3. Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\cos t)u \\ \dot{x}_2 = (\sin t)u, \end{cases} \quad (6.3)$$

где  $|u| \leq 1$ , может рассматриваться как простой модельный пример, на котором хорошо просматривается роль функции  $\delta(t, x)$ . Если  $\delta = 0$ , то построенное в этой работе неупреждающее управление имеет вид

$$u(t, x) = \begin{cases} -\frac{x_1 \cos t + x_2 \sin t}{|x_1 \cos t + x_2 \sin t|}, & \text{если } x_1 \cos t + x_2 \sin t \neq 0 \\ 0, & \text{если } x_1 \cos t + x_2 \sin t = 0 \end{cases} = -\operatorname{sgn}(x_1 \cos t + x_2 \sin t).$$

Среди  $\mathcal{F}$ -решений замкнутой системы есть решение  $x_1 = \sin t, x_2 = -\cos t$ , которое не стремится к нулю (на самом деле у замкнутой системы вообще нет сходящихся к нулю решений,



**Рис. 14.** Результат применения упрощенного адаптированного алгоритма для системы из примера 3 при разных начальных условиях  $x(t_0)$ .

кроме тривиального решения). Поэтому здесь необходимо вводить  $\delta(t, x)$ . Адаптивный алгоритм управления здесь действует наиболее эффективно.

На рис. 12 и 13 показан результат применения упрощенного адаптированного алгоритма для системы при значениях параметров

$$N = 3000, N_\vartheta = 1, \delta(0, x(0)) = 0.8, \varepsilon_0 = 0.01, d_s = 3000, T_0 = 0, T = 8, x_1(0) = -1, x_2(0) = -2,$$

а на рис. 14 — фазовый портрет системы (6.3). На заключительном этапе здесь тоже возникает режим с бесконечным числом переключений, но он достаточно короткий и на рис. 14 плохо просматривается.

**Пример 4.** Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\sin t)u \\ \dot{x}_2 = (\cos \sqrt{t})u, \end{cases} \quad (6.4)$$

где  $|u| \leq 1$ . Несмотря на внешне очень простой вид, нам не удалось проверить второе условие (условие дифференциальной управляемости) для системы (6.4), входящее в условия невырожденности.

На рис. 15 и 16 показан результат применения упрощенного адаптированного алгоритма для системы (6.4) при значениях параметров

$$N = 5000, N_\vartheta = 1, \delta(0, x(0)) = 0.001, \varepsilon_0 = 0.01, d_s = 200, T_0 = 0, T = 15, x_1(0) = 4, x_2(0) = -1,$$

а на рис. 17 — фазовый портрет системы (6.4). В этом примере применяется адаптация корректирующей функции. Обращает внимание сложное поведение функции  $\omega(t, x)$ , в результате чего процесс адаптации корректирующей функции  $\delta(t, x)$ , продолжается достаточно долго.

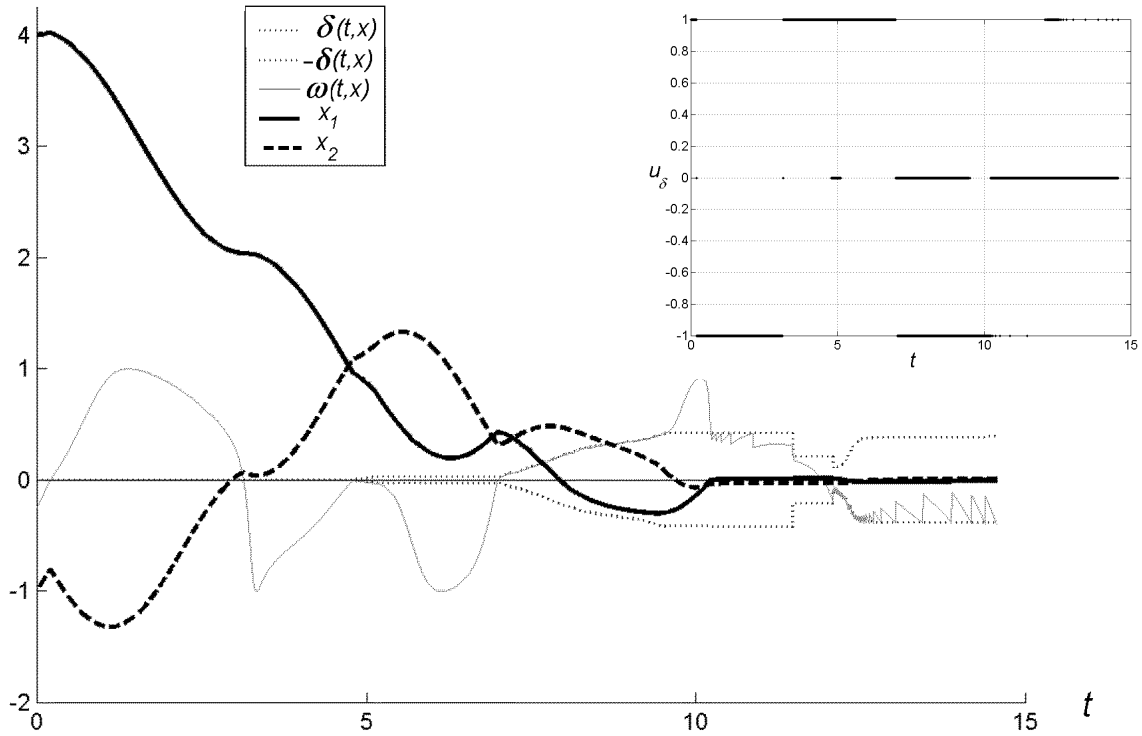


Рис. 15. Графики управляющей функции и решений системы из примера 4.

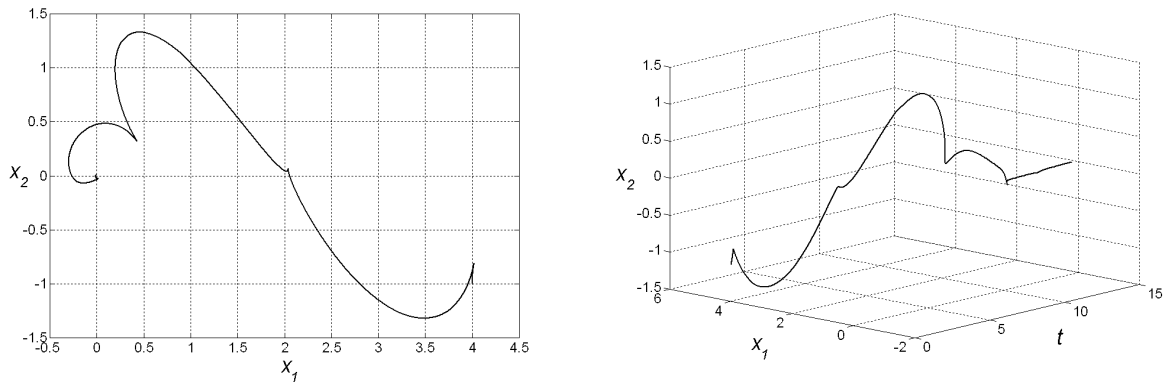


Рис. 16. Фазовый портрет системы из примера 4.

**Пример 5.** В заключение приведем пример системы, для которой неупреждающее управление, построенное в этой статье, не требует применения алгоритма адаптации, действует весьма эффективно и процесс управления не сопровождается бесконечным числом переключений.

Будем рассматривать маятник с подвижной точкой подвеса. Движение такого маятника описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \left( \frac{g}{\ell} + \frac{1}{\ell} \ddot{q}(t) \right) \varphi = -\frac{1}{\ell} \ddot{p}(t), \tag{6.5}$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\ell$  — длина маятника,  $\varphi$  — угол отклонения маятника от положения равновесия,  $p(t)$  — горизонтальное отклонение точки подвеса маятника,  $q(t)$  — вертикальное отклонение точки подвеса маятника. Обозначим  $\varphi = x_1$ ,  $\dot{\varphi} = x_2/\ell$ , а также  $u_1(t) = \ddot{p}(t)$ ,  $u_2(t) = \ddot{q}(t)$ . Если позволено управлять точкой подвеса с помощью функций  $u_1(t)$

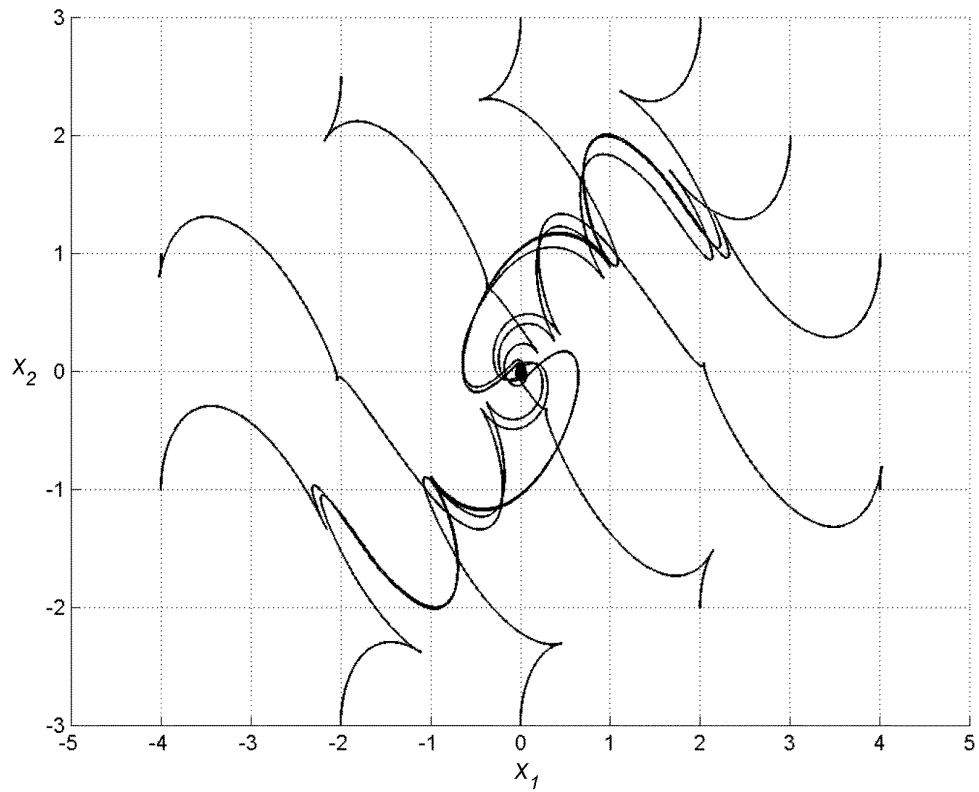


Рис. 17. Результат применения упрощенного адаптированного алгоритма для системы из примера 4 при разных начальных условиях  $x(t_0)$ .

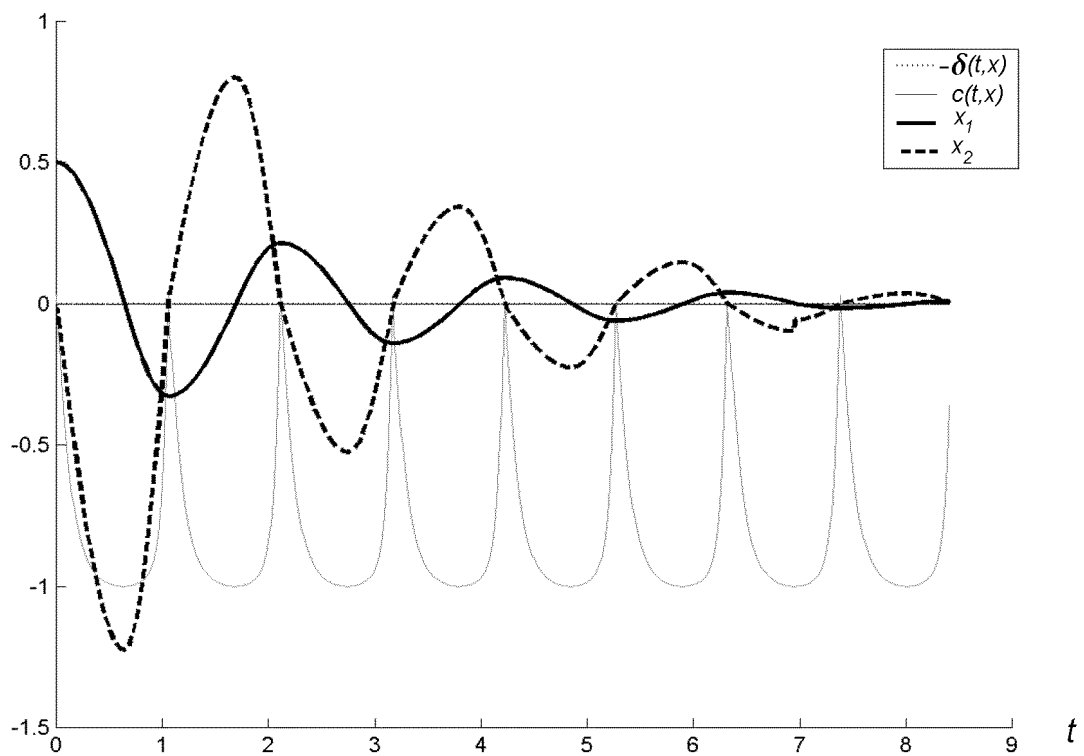


Рис. 18. Графики решений системы из примера 5.

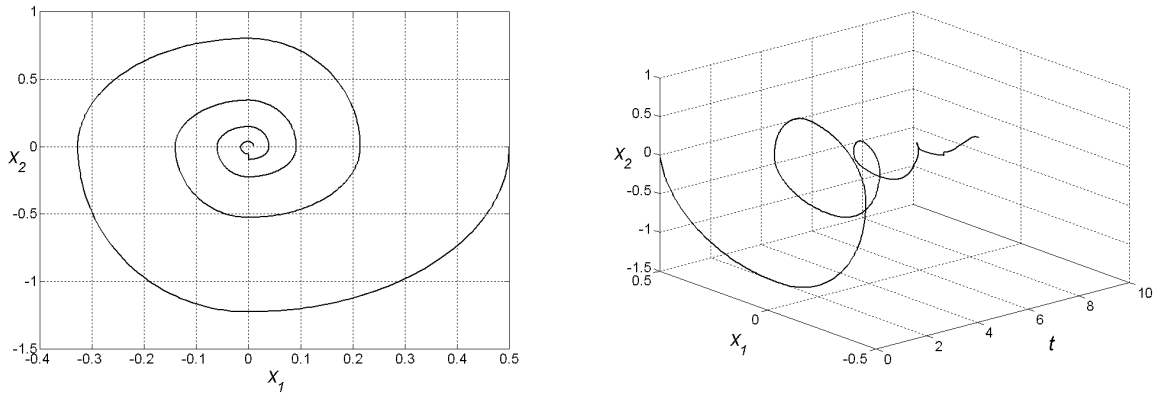


Рис. 19. Фазовый портрет системы из примера 5.

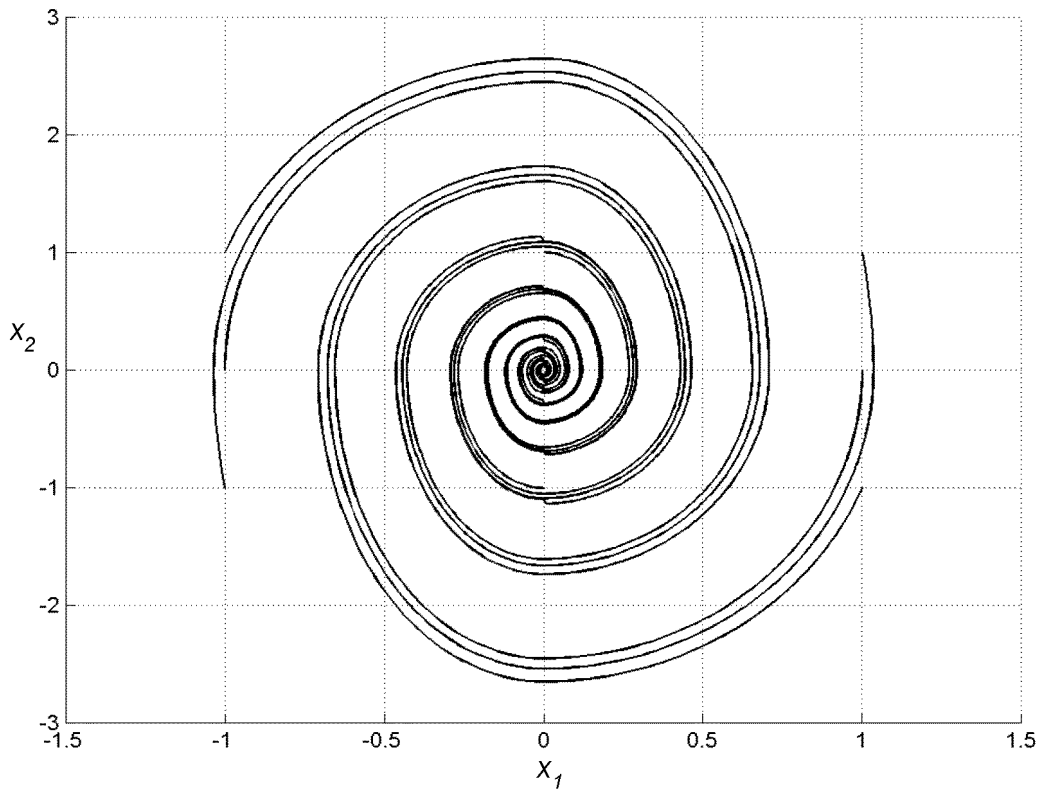


Рис. 20. Результат применения общего алгоритма для системы из примера 5 при разных начальных условиях  $x(t_0)$ .

и  $u_2(t)$ , то мы имеем управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{\ell} x_2 \\ \dot{x}_2 = -g x_1 - u_2 x_1 - u_1, \end{cases} \quad (6.6)$$

эквивалентную уравнению (6.5). Допустим, что требуется всякое отклонение маятника от положения равновесия приводить в нуль с нулевой скоростью. Тогда возникает задача о построении соответствующего регулятора. Далее будем предполагать, что  $\ell = 1$  и  $g = 9.8$ . Таким образом, система (6.6), это нелинейная система вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t, x)u, \quad (6.7)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t, x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -x_1 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Физический смысл параметров следующий:  $x_1$  — угол отклонения,  $x_2$  — угловая скорость. В качестве множества  $U$  значений допустимых управлений рассмотрим ромб из четырех точек  $\{-p, 0\}$ ,  $\{0, q\}$ ,  $\{p, 0\}$ ,  $\{0, -q\}$ . В силу того, что в этом примере функция  $c(t, x)$  ведет себя «достаточно правильно» (она редко подходит к нулю и не долго находится вблизи нуля), алгоритм адаптации корректирующей функции можно не применять.

На рис. 18 и 19 показан результат применения общего алгоритма для системы с матрицами (6.8) при следующих значениях параметров

$$N = 1000, \quad N_{\vartheta} = 1, \quad \delta(t_0, x(t_0)) \equiv 0, \quad \varepsilon_0 = 0.01, \quad T_0 = 0, \quad T = 10, \quad p = q = 4,$$

а на рис. 20 — фазовый портрет системы (6.7).

Поступила 31.12.99

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.:Наука, 1985. 518 с.
- [2] Тонков Е.Л. Равномерная локальная управляемость и стабилизация нелинейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 5. С. 908–910.
- [3] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.:Наука, 1985. 224 с.
- [4] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.:Наука, 1981. 286 с.
- [5] Brunovski P. Regular synthesis and singular extremas // Lect. Contr. and Inform. Sci. 1980. V. 22, P. 280–284.
- [6] Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. Позиционное управление нелинейной системой близкой к докритической // Изв. Ин-та матем. и информ. Ижевск. 1998. № 2 (13). С. 3–26.
- [7] Родионова А.Г., Тонков Е.Л. О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае // Изв. ВУЗ-ов. Математика. 1993. № 5 (372). С. 101–111.
- [8] Nikolayev S.F., Tonkov E.L. Differentiability of Speed Function and Feedback Control of Linear Nonstationary System // Nonsmooth and Discontin. Probl. of Contr. and Optimiz. / A Proceed. vol. from the IFAC Workshop (Chelyabinsk, Russia, 17–20 June 1998). 1999. P. 177–186.
- [9] Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. ???–???
- [10] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.:Наука, 1969. 384 с.
- [11] Зеликин М.И. Оптимальный синтез, содержащий последовательно вложенные четтеринг-расслоения // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 152–164.

Николаев Сергей Федорович  
Удмуртский государственный университет  
г. Москва, Отрадный проезд 11, кв. 55.  
127273, Россия  
e-mail: sam@orc.ru

Тонков Евгений Леонидович  
Удмуртский государственный университет  
г. Ижевск, ул. Университетская 1(корп. 4)  
426034, Россия  
e-mail: elt@ipm.uni.udm.ru