Известия института математики и информатики. Ижевск, 1996, № 2 (8)

УДК 517.977

С.Ф. Николаев, Е.Л. Тонков

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ И ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМОЙ

Введение. Здесь мы исследуем условия дифференцируемости функции быстродействия $(t,x) \to \tau_n(t,x)$ линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad |u| \leqslant 1, \tag{1}$$

(с одним входом и n выходами, $n \geqslant 2$) и возможность построения позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия.

Следует отметить,что, независимо от гладкости $A(\cdot)$ и $b(\cdot)$, в любой окрестности нуля пространства (t,x)-переменных существуют (отличные от нуля) точки, в которых функция быстродействия теряет гладкость, но таких точек "достаточно мало". Более точно, будет показано, что в предположении неосцилляции сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$ относительно гиперплоскости, определяемой нормальным вектором $b(t)$, в расширенном фазовом пространстве (пространстве (t,x)-переменных) существует слабо инвариантное гладкое многообразие N^n размерности n, содержащее нуль и обладающее тем свойством, что в каждой точке $(t,x) \in N^n$ функция быстродействия не имеет производной. Далее, во всех точках (t,x) множества $D \doteq \{(t,x) \colon t \in \mathbb{R},\ \tau_n(t,x) < \sigma(t)\}$ ($\sigma(t) = \sigma(t, A(\cdot), b(\cdot)) > 0$ определяет интервал неосцилляции) не лежащих на многообразии N^n, функция быстродействия имеет гладкость на единицу больше гладкости функции $t \to (A(t), b(t))$, задающей систему (1).

Оказывается, что аналогичным образом функция быстродействия ведет себя на многообразии N^n: во всех точках многообразия N^n, за исключением точек, находящихся на некотором (слабо инвариантном) подмногообразии N^{n-1} размерности $n-1$, функция $\tau_n(t,x)$ непрерывно дифференцируема при $(t,x) \in D$ в направлении любого вектора, лежащего в пространстве, касательном к N^n в точке (t,x). Такая структура вложенных слабо инвариантных многообразий, уменьшающих размерность пространства непрерывной дифференцируемости по направлениям, естественным образом продолжается до многообразия размерности 1 (факторизация Полиа и Маммана).

Многообразия N^k, $k = 1, \ldots, n$, обладают тем свойством, что на них оптимальное в смысле быстродействия управление разрывно (управление переключается с $+1$ на -1 или с -1 на $+1$), а конус допустимых векторов скоростей (который направляет оптимальное движение, если понимать такое движение в смысле определения А.Ф. Филиппова) касается одного из многообразий N^k (т.е. конус находится по одну сторону от касательного пространства и имеет с этим пространством общий вектор). Это обстоятельство позволяет корректно определить позиционное управление, оптимальное в смысле быстродействия. При этом позиционное управление достаточно задать только на многообразии N^{1+n} максимальной размерности, так как движения $(t, x(t))$ (в смысле Филиппова) системы с разрывной по фазовым координатам правой частью не зависят от того, как определена правая часть на множествах, мера Лебега которых (в $\mathbb{R}^{1+n}$) равна нулю. Таким образом, наличие факторизации Полиа-Маммана влечет существование позиционного управления, оптимального в смысле быстродействия.

1. Обозначения и определения. В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^* x}$ ($*$ — операция транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x); $\mathrm{End}\,(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений в $\mathbb{R}^n$ с нормой $|A| = \max\limits_{|x| \leqslant 1} |Ax|$.

Пусть D — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathrm{int} D$ — внутренность множества D относительно $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{cl} D$ — замыкание D в $\mathbb{R}^n$. *Опорной функцией* $\xi \to c(\xi, D)$ множества D называется функция, определенная равенством $c(\xi, D) = \sup\limits_{x \in D} \xi x$. Свойства опорной функции см. [1, с.121]. Для нас важно, что включение $0 \in \mathrm{int} D$ эквивалентно неравенству $c(\xi, D) > 0$ для всех $\xi \in S^{n-1}$, где $S^{n-1} \doteq \{\xi \in \mathbb{R}^n \colon |\xi| = 1\}$.

Напомним [2], что если M и N — многообразия класса C^r $(r \geqslant 1)$, вложенные в конечномерные пространства и f — отображение из M в N, то f принадлежит классу C^k $(k \leqslant r)$ в точке $p \in M$, если для любой k раз непрерывно дифференцируемой кривой $p \colon (-1, 1) \to M$, проходящей через точку p $(p(0) = p)$, функция $\varepsilon \to f(p(\varepsilon))$ из $(-1, 1)$ в N принадлежит классу C^k в точке $\varepsilon = 0$. Далее, отображение $df(p) : T_p M \to T_q N$, действующее из пространства $T_p M$, касательного к M в точке p в пространство $T_q N$, касательное к N в точке $q = f(p)$ и определенное равенством $df(p)v = df(p(\varepsilon))/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ для всякой C^k-кривой $p \colon (-1, 1) \to M$ $(p(0) =$

p, $dp(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = v \in T_pM)$, называется производной отображения f в точке p. Отображение $f: M \to N$ называется C^k-*диффеоморфизмом*, если оно принадлежит классу C^k и имеет обратное того же класса. *Если $f: M \to N$ отображение класса C^k и $df(p)$ — изоморфизм для каждого $p \in M$, то f — диффеоморфизм класса C^k.*

Всюду далее предполагается, что функции $A: \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, задающие систему (1), непрерывны.

Функцией быстродействия $(t, x) \to \tau_n(t, x)$ системы (1) называется функция, значение которой в каждой точке (t_0, x_0) определяется равенством

$$\tau_n(t_0, x_0) = \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} \{\vartheta \geqslant 0 \colon x(t_0 + \vartheta, t_0, x_0, u(\cdot)) = 0\},$$

где $\mathcal{U}$ — совокупность всех измеримых функций со значениями в $[-1, 1]$, $x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$ — решение системы (1) при управлении $u = u(t)$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$. Если для некоторой точки (t_0, x_0) не существует допустимого управления, переводящего решение в нуль за конечное время, будем полагать, что $\tau_n(t_0, x_0) = \infty$.

Множеством управляемости системы (1) *на отрезке времени* $[t_0, t_0 + \vartheta]$ называется множество $D_\vartheta(t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \tau_n(t_0, x) \leqslant \vartheta\}$. Для $D_\vartheta(t_0)$ имеет место равенство (см., например, [3, с.103])

$$D_\vartheta(t_0) = -\int_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)U\,dt, \tag{2}$$

где $U = [-1, 1]$, $X(t, s)$ – матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$, а интеграл понимается в смысле А.А. Ляпунова ([4, с.229]).

Система (1) называется *дифференциально управляемой в точке* t_0, если для всех $\vartheta > 0$ имеет место включение $0 \in \operatorname{int} D_\vartheta(t_0)$, и *дифференциально управляемой на интервале* $J \subset \mathbb{R}$, если она дифференциально управляема в каждой точке этого интервала. В [3, лемма 1 и теорема 2] показано, что если система (1) дифференциально управляема на J, то для любого $t_0 \in J$ *множество управляемости* $D(t_0) \doteq \bigcup_{\vartheta\geqslant 0} D_\vartheta(t_0)$ открыто в $\mathbb{R}^n$ и функция быстродействия непрерывна в каждой точке $(t_0, x_0) \in J \times D(t_0)$.

Множество $\mathfrak{N}$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$ системы (1) называется *слабо инвариантным*, если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathfrak{N}$ существует управление $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ такое, что решение $x_0(t)$ системы (1) при $u = u_0(t)$ и начальном условии $x_0(t_0) = x_0$, удовлетворяет включению

$(t, x_0(t)) \in \mathfrak{N}$ для всех $t \geqslant t_0$. В частности, *расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \mathrel{\hat{=}} \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ слабо инвариантно (для любой функции $\sigma(t)$, удовлетворяющей неравенству $\sigma(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$).

2. Докритичность и неосцилляция. Пусть $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ — произвольная фундаментальная система решений сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = -\psi A(t). \tag{3}$$

Обозначим через $\sigma(t_0)$ точную верхнюю грань таких $\sigma > 0$, что на полуинтервале $[t_0, t_0 + \sigma)$ совокупность функций

$$\xi_1(t) \mathrel{\hat{=}} \psi_1(t)b(t), \ldots, \xi_n(t) \mathrel{\hat{=}} \psi_n(t)b(t) \tag{4}$$

является чебышевской системой (Т-системой), т.е. всякая нетривиальная линейная комбинация функций (4) имеет на $[t_0, t_0+\sigma)$ не более $n-1$ геометрически различных нулей (кратность нулей не учитывается). Из определения $\sigma(t_0)$ следует, что для любого $\vartheta \in [0, \sigma(t_0)]$ всякое нетривиальное решение системы (3) пересекает гиперплоскость $\gamma(t) \mathrel{\hat{=}} \{\psi \in \mathbb{R}^n : \psi b(t) = 0\}$ не более $n-1$ раз, когда t пробегает интервал $[t_0, t_0 + \vartheta)$. Это свойство названо в [5] свойством *неосцилляции* системы (3) на интервале $[t_0, t_0 + \vartheta)$ относительно гиперплоскости $\gamma(t)$. Простые примеры показывают, что функция $t \to \sigma(t)$ может быть разрывной, но она полунепрерывна снизу (если t_0 — точка разрыва, то $\sigma(t_0 - 0) = \sigma(t_0) < \sigma(t_0 + 0)$.) Отметим еще, что совокупность (4) является T-системой на $[t_0, t_0 + \vartheta)$ в том и только в том случае, если для любого набора точек $t_1, \ldots, t_n$, таких, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots\ < t_n < t_0 + \vartheta$, определитель $\det(\xi_i(t_j))_{i,j=1}^n$ отличен от нуля (см. [6, с.51]).

Основное свойство T-систем, необходимое нам для дальнейшего, известно под названием теоремы С.Н. Бернштейна [6, с.53]: *если совокупность* (4) *является T-системой на* $[t_0, t_0 + \vartheta)$, *то для любого набора точек $t_1, \ldots, t_{n-1}$ таких, что $t_0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_0 + \vartheta$, найдется линейная комбинация функций* (4), *имеющая простые нули в точках t_i и не имеющая других нулей на* $[t_0, t_0 + \vartheta)$.

Определение 1.1 *Система* (1) *называется докритической на интервале J, если $\sigma(t) > 0$ для всех $t \in J$.*

Лемма 1. *Если система* (1) *докритическая на J, то она дифференциально управляема для всех $t \in J$.*

Действительно, для каждого $t_0 \in J$ и любого $\vartheta \in (0, \sigma(t_0))$, опорная функция $\psi \to c(\psi, D_\vartheta(t_0))$ множества $D_\vartheta(t_0)$ определяется равенством

$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} |\xi(t)|dt$, где $\xi(t) = \psi(t)b(t)$, $\psi(t)$ — решение системы (3) с условием $\psi(t_0) = -\psi$. Поэтому $\min\limits_{\psi \in S^{n-1}} c(\psi, D_\vartheta(t_0)) > 0$, что и доказывает лемму.

В дальнейшем мы будем предполагать, что система (1) докритическая на $\mathbb{R}$. Вопрос о наличии докритичности у системы (1) и свойствах (в частности, оценках снизу и сверху) функции $t \to \sigma(t)$ представляет самостоятельный интерес. На эту тему планируется отдельная статья, здесь же мы приведем без доказательства два утверждения относящиеся к докритичности.

Т е о р е м а 1. *Всякая система вида* (1) *приводимая невырожденным преобразованием* $z(t) = L(t)x$ *(*$L(t)$ *непрерывно дифференцируема и* $det L(t) \neq 0, t \in J$*) к канонической системе*

$$\dot{z} = F(t)z + g(t)u,$$

докритична. Здесь

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n-1} & f_{1n} \\ -\beta_2 & f_{22} & \dots & f_{2n-1} & f_{2n} \\ 0 & -\beta_3 & \dots & f_{3n-1} & f_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_n & f_{nn} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix},$$

причем функции f_{ik} *и* β_i *непрерывны по* t *и* $\beta_i(t) > 0,\ t \in J,\ i = 1, \dots, n.$

Допустим, что система (1) удовлетворяет следующим двум условиям.

У с л о в и е 1. Для каждого $i = 1, \dots, n+1$ функции $t \to q_i(t)$, определенные равенствами $q_1(t) = b(t), \dots, q_i(t) = \dot{q}_{i-1}(t) - A(t)q_{i-1}(t)$, непрерывны, ограничены на $\mathbb{R}$ и $\det Q(t) \neq 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где $Q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$.

У с л о в и е 2. Найдутся числа $\nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ такие, что $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \dots \leqslant \nu_{n-1}$ и для корней $\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ уравнения $\det(\lambda Q(t) - H(t)) = 0$, где $H(t) = (q_2(t), \dots, q_{n+1}(t))$, при всех t выполнены неравенства

$$\lambda_1(t) \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2(t) \leqslant \dots \leqslant \nu_{n-1} \leqslant \lambda_n(t). \tag{5}$$

Т е о р е м а 2. *Если выполнены условия* 1 *и* 2, *то* $\sigma(t) = \infty$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$. *Далее, если найдутся такие константы* $\varepsilon > 0$ *и* $\delta \geqslant 0$, *что дополнительно к* (5) *при всех достаточно больших* t *выполнены неравенства* $\delta \leqslant \lambda_1(t)$, $\nu_{i-1} + \varepsilon \leqslant \lambda_i(t) \leqslant \nu_i - \varepsilon$, $i = 2, \dots, n-1$, *то множество управляемости* $D(t)$ *системы* (1) *совпадает с* $\mathbb{R}^n$ *при всех* t.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_1(t)x_1 + a_2(t)x_3 + u \\
\dot{x}_2 &= x_1 \\
\dot{x}_3 &= x_1 + a_3(t)x_3,
\end{aligned}
$$

описывающую (в линейном приближении) динамику летательного аппарата с переменными аэродинамическими характеристиками (см. [7]). Здесь x_2 — угол тангажа, x_3 — угол атаки, u — отклонение руля высоты. Непосредственно проверяется, что если a_i не зависят от t, то неравенство $a_3 \neq 0$ является необходимым и достаточным условием докритичности системы, а условия $a_3 \neq 0$, $(a_1 - a_3)^2 + 4a_2 \geqslant 0$ обеспечивают глобальную докритичность (то есть $\sigma = \infty$).

Пусть теперь функции $t \to a_i(t)$ непрерывны и для всех t выполнено условие $a_3(t) \neq 0$. Можно показать тогда (с применением теорем 1 и 2), что если для каждого t найдется такое $\vartheta > 0$, что выполнено неравенство

$$
-1 \leqslant a_3(t) \int\limits_t^{t+\vartheta} a_2(s) \exp \int\limits_t^s (a_3(\tau) - a_1(\tau))\, d\tau\, ds \leqslant 0,
$$

то система докритическая, причем $\sigma(t) > \vartheta$. В частности, если $a_3(t) < 0$ и $a_2(t) \geqslant 0$, или $a_3(t) > 0$ и $a_2(t) \leqslant 0$, то $\sigma(t) > 0$.

3. Структура границы множества управляемости. Будем далее предполагать, что функции $A\colon \mathbb{R} \to \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ и $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задающие систему (1), ограничены на $\mathbb{R}$, принадлежат классу C^r (т.е. r раз непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$), где $r \geqslant 0$ и система (1) докритична.

Если $\vartheta < \sigma(t_0)$, то, в силу принципа максимума Л.С. Понтрягина

$$
\max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \psi(t)b(t)u = \psi(t)b(t)u(t), \qquad t \in [t_0, t_0 + \vartheta], \tag{6}
$$

для всякой точки $x_0 \in D_\vartheta(t_0)$ найдутся целое k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и вектор $\tau \in M^k(\vartheta)$, где $M^0(\vartheta) \doteq \{0\}$,

$$
M^k(\vartheta) \doteq \{\tau = (\tau_{n-k}, \dots, \tau_{n-1}) \in \mathbb{R}^k \colon 0 < \tau_{n-k} < \dots < \tau_{n-1} < \vartheta\},
$$

$k = 1, \dots, n-1$, такие, что управление, переводящее $x_0 = x(t_0)$ в начало координат за минимальное время, принимает значения $+1$ или -1 и имеет переключения только в точках $t_0+\tau_i,\ i=n-k,\dots,n-1$ (точки $t_0+\tau_i,\ i=n-k,\dots,n-1$, отвечают нулям функции $\xi(t) \doteq \psi(t)b(t)$, где $\psi(t)$ — некоторое нетривиальное решение системы (3)). В силу условия $\vartheta<\sigma(t_0)$, таких переключений не более $n-1$. Множеству $M^0(\vartheta)$ отвечают точки из $D_\vartheta(t_0)$, переходящие в нуль под действием управлений без переключений. Мы интерпретируем $M^k(\vartheta)$ как вложенные (в $\mathbb{R}^k$) гладкие многообразия размерности k с естественной топологией.

Для каждого $k=0,\dots,n-1$ построим множества $N_+^k(t_0,\vartheta)$ и $N_-^k(t_0,\vartheta)$ следующим образом: $N_+^k(t_0,\vartheta)$ состоит из всех таких точек $x_0\in D_\vartheta(t_0)$, для каждой из которых найдётся точка $\tau(t_0,x_0)\in M^k(\vartheta)$ такая, что оптимальное управление $u(t,x_0),\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+\vartheta$, переводит точку $x(t_0)=x_0$ в точку $x(t_0+\vartheta)=0$, имеет переключения только в моменты времени $t=t_0+\tau_i(t_0,x_0)$ и до первого момента переключения $u(t,x_0)=+1$. При этом множество $N_+^0(t_0,\vartheta)$ состоит из одной точки: $N_+^0(t_0,\vartheta)=\left\{-\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta}X(t_0,t)b(t)\,dt\right\}$. Множества $N_-^k(t_0,\vartheta)$ определяются аналогично с заменой управления $u(t,x_0)$ на -1 при $t_0\leqslant t<t_0+\tau_{n-k}(t_0,x_0)$.

Множества $N_+^k(t_0,\vartheta)$ и $N_-^k(t_0,\vartheta)$, $k=0,\dots,n-1$, обладают следующими свойствами.

С в о й с т в о 1. *$N_+^k(t_0,\vartheta)\subset\partial D_\vartheta(t_0)$ и всякой точке $x_0\in N_+^k(t_0,\vartheta)$ отвечает единственная точка $\tau(t_0,x_0)\in M^k(\vartheta)$ (набор моментов переключения) такая, что управление $u(t,x_0)$, удовлетворяющее принципу максимума* (6), *переводит $x_0=x(t_0)$ в $x(t_0+\vartheta)=0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, так как $N_+^k(t_0,\vartheta)\subset D_\vartheta(t_0)$, то существование точки $x_0\in N_+^k(t_0,\vartheta)$ не принадлежащей $\partial D_\vartheta(t_0)$, влечёт включение $x_0\in\mathrm{int}D_\vartheta(t_0)$. Следовательно, время быстродействия $\tau_n(t_0,x_0)$ из точки x_0 в нуль удовлетворяет неравенству $\tau_n(t_0,x_0)<\vartheta$. Соответствующее управление $u_0(t)$ удовлетворяет условию (6) для некоторого нетривиального решения $\psi_0(t)$ уравнения (3). С другой стороны, из определения $N_+^k(t_0,\vartheta)$ следует, что существует $\tau\in M^k(\vartheta)$, при котором управление $u(t,\tau)$ также переводит x_0 в нуль за время ϑ. Доопределим $u_0(t)$ на $(t_0+\tau_n(t_0,x_0),t_0+\vartheta]$ тождественным нулём и рассмотрим функцию $v(t)=u(t,\tau)-u_0(t)$. Эта функция, как легко видеть, сохраняет знак на интервалах $(t_0+\tau_i,t_0+\tau_{i+1}),\ i=n-k-1,\dots,n-1,\ \tau_{n-k-1}=0,\ \tau_n=\vartheta$, причём $(-1)^i v(t)\geqslant 0$ при $t\in(t_0+\tau_i,t_0+\tau_{i+1})$. Следовательно, функция $v(t)$ имеет на $[t_0,t_0+\vartheta]$ не более k перемен знака, т.е. существует не более k различных точек $t_1<t_2<\dots<t_k$ интервала $(t_0,t_0+\vartheta)$ таких, что

$v(t_i)v(t_{i+1}) < 0$. Далее, функция $y(t) \doteq x(t) - x_0(t)$ ($x(\cdot)$ и $x_0(\cdot)$ – решения системы (1) из точки $x_0 = x(t_0)$, отвечающие $u(\cdot)$ и $u_0(\cdot)$) является решением задачи $\dot{y} = A(t)y + b(t)v(t)$, $y(t_0) = y(t_0 + \vartheta) = 0$ и поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)v(t)\,dt = 0. \tag{7}$$

Далее, найдётся вектор $\psi \neq 0$ такой, что функция $\xi(t) = \psi X(t_0, t)b(t)$ имеет нули в точках перемен знака функции $v(t)$ и $\xi(t)v(t) \geqslant 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta < t_0 + \sigma(t_0)$. Умножая (7) на ψ, имеем равенство $\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \xi(t)v(t)\,dt = 0$. Следовательно, $v(t) \equiv 0$, $u(t, \tau) \equiv u_0(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta$, что противоречит предположению $\tau_n(t_0, x_0) < \vartheta$.

Доказательство единственности управления $u(t, \tau)$, отвечающего точке $x_0 \in N^k_+(t_0, \vartheta)$ аналогично: для управлений $u(t, \tau)$, $u_0(t)$, переводящих $x(t_0) = x_0$ в $x(t_0 + \vartheta) = 0$ относительно функции $v(t) = u(t, \tau) - u_0(t)$ имеем равенство (7). Свойство 1 доказано.

В силу свойства 1 существует функция $f^{-1} : N^k_+(t_0, \vartheta) \to M^k(\vartheta)$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in N^k_+(t_0, \vartheta)$ точку $\tau \in M^k(\vartheta)$, задающую моменты переключений оптимального управления $u(t, \tau)$.

С в о й с т в о 2. *Функция f^{-1} непрерывна и осуществляет гомеоморфизм множеств $N^k_+(t_0, \vartheta)$ и $M^k(\vartheta)$. Обратная функция $f\colon M^k(\vartheta) \to N^k_+(t_0, \vartheta)$ определена равенством*

$$f(\tau) = \sum_{i=n-k-1}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0, t)b(t)\,dt, \tag{8}$$

где $\tau_{n-k-1} = 0$, $\tau_n = \vartheta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция g непрерывна. Пусть последовательность $\{x_j\}_1^\infty \subset N^k_+(t_0, \vartheta)$ такова, что $x_j \to x_0 \in N^k_+(t_0, \vartheta)$. Последовательности $\{x_j\}_1^\infty$ отвечает последовательность $\{\tau_j\}_1^\infty$, $\tau_j = g(x_j) \in M^k(\vartheta)$, а точке x_0 – точка $\tau_0 = g(x_0) \in M^k(\vartheta)$. Надо показать, что $\tau_j \to \tau_0$. Выделим из последовательности $\{\tau_j\}_1^\infty$ сходящуюся подпоследовательность, которую снова обозначим $\{\tau_j\}_1^\infty$. Предел этой последовательности $\tau_* \in \operatorname{cl} M^k(\vartheta)$. Пусть управление $u(t, \tau_j)$ отвечает точке x_j

(т.е. переводит x_j в нуль), тогда

$$x_j = -\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)u(t,\tau_j)\,dt. \tag{9}$$

Переходя в (9) к пределу, получим $x_0 = -\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)u(t,\tau_*)\,dt$. С другой стороны, $x_0 = -\int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0,t)b(t)u(t,\tau_0)\,dt$ и поэтому (см. доказательство свойства 1) $\tau_* = \tau_0$. Следовательно, из сходимости $x_j \to x_0$ следует сходимость $f^{-1}(x_j) \to f^{-1}(x_0)$. Доказательство равенства (8) очевидно.

С в о й с т в о 3. *Для любого* $k = 1,\dots,n-1$ *и любой точки* $\tau = (\tau_{n-k},\dots,\tau_{n-1}) \in M^k(\vartheta)$ *векторы*

$$h(\tau_{n-k}) \doteq X(t_0,t_0+\tau_{n-k})b(t_0+\tau_{n-k}),\dots,$$
$$h(\tau_{n-1}) \doteq X(t_0,t_0+\tau_{n-1})b(t_0+\tau_{n-1})$$

линейно независимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если найдутся числа $c_{n-k},\dots,c_{n-1}$ не равные нулю одновременно такие, что $h(\tau_{n-k})c_{n-k} + \dots + h(\tau_{n-1})c_{n-1} = 0$, то для всякого $\psi \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\xi(\tau_{n-k})c_{n-k} + \dots + \xi(\tau_{n-1})c_{n-1} = 0, \tag{10}$$

где $\xi(\tau_i) = \psi X(t_0,t_0+\tau_i)b(t_0+\tau_i)$. Пусть $c_j \neq 0$. Найдётся такой вектор $\psi \neq 0$, что функция $\xi(t) = \psi X(t_0,t)b(t)$ имеет нули в точках $t_0+\tau_i,\ i \neq j$ и $\xi(\tau_j) \neq 0$ (это следует из неосцилляции и цитированной теоремы Бернштейна). Поэтому из (10) следует, что $\xi(\tau_j)c_j = 0$. Свойство 3 доказано.

В силу свойств 1–3, для каждого $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ и любого $k = 1,\dots,n-1$, множество $N_+^k(t_0,\vartheta)$ является гладким (класса C^1) многообразием размерности k, вложенными в $\mathbb{R}^n$. В действительности оно принадлежит классу C^{r+1}. Докажем это. Из равенства $f(\tau+\delta\tau) = f(\tau) + df(\tau)\delta\tau + o(|\delta\tau|)$, где $df(\tau) = (q_{n-k}(\tau),\dots,q_{n-1}(\tau))$,

$$q_i(\tau) = \partial f(\tau)/\partial\tau_i = -2(-1)^{i-n+k}h(\tau_i), \quad i = n-k,\dots,n-1,$$

следует, что опрератор $df(\tau)$ действует из пространства $T_\tau M^k$ касательного к многообразию $M^k(\vartheta)$ в точке τ (и отождествляемого с $\mathbb{R}^k$) в пространство $T_x N^k$ касательное к $N_+^k(t_0,\vartheta)$ в точке $x = f(\tau)$ (моделью которого служит $\mathbb{R}^k$). Кроме того, $df(\tau)(T_\tau M^k) = T_x N^k$ и поэтому $df(\tau)$

— изоморфизм. С учетом условий на систему (1), легко проверить, что функция $\tau \to df(\tau)$ принадлежит классу C^r, следовательно, f — диффеоморфизм класса C^{r+1} и поэтому $N_+^k(t_0,\vartheta)$ — многообразие класса C^{r+1}.

Теорема 3. (анонсирована в [8]). *Пусть система* (1) *докритическая на* $\mathbb{R}$. *Тогда для каждого* $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ *множество управляемости* $D_\vartheta(t_0)$ *является строго выпуклым телом в* $\mathbb{R}^n$ *(т.е.* $\operatorname{int} D_\vartheta(t_0) \neq 0$ *и для любых* $x, x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ *и любого* $\lambda \in (0,1)$ *точка* $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in \operatorname{int} D_\vartheta(t_0)$*). Граница* $\partial D_\vartheta(t_0)$ *множества* $D_\vartheta(t_0)$ *есть объединение непересекающихся гладких (класса* C^{r+1}*) многообразий* $N_+^k(t_0,\vartheta)$ *и* $N_-^k(t_0,\vartheta)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, *и объединение*

$$\left(\bigcup_{i=0}^{k-1} N_-^i(t_0,\vartheta)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} N_+^i(t_0,\vartheta)\right)$$

является общим краем многообразий $\operatorname{cl} N_+^k(t_0,\vartheta)$ *и* $\operatorname{cl} N_-^k(t_0,\vartheta)$. *Далее, всякой точке* $x \in N_+^k(t_0,\vartheta)$ *отвечает единственное управление, переводящее* $x(t_0) = x$ *в* $x(t_0+\vartheta) = 0$, *причем* $u(t,x)$ *имеет ровно* k *переключений на интервале* $(t_0, t_0+\vartheta)$.

Доказательство. Все утверждения теоремы, кроме утверждения о строгой выпуклости $D_\vartheta(t_0)$ уже доказаны. Доказательство строгой выпуклости следует из единственности управления $u(t,x_0)$, переводящего точку $x_0 = x(t_0) \in \partial D_\vartheta(t_0)$ в нуль за время ϑ. Действительно, если найдётся $\lambda \in (0,1)$ такое, что $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_0 \in \partial D_\vartheta(t_0)$ для некоторых $x_0, x_1 \in \partial D_\vartheta(t_0)$, то $u_\lambda(t) = \lambda u(t,x_1) + (1-\lambda)u(t,x_0)$ – единственное управление, переводящее точку x_λ в нуль за время ϑ. Поэтому $|u_\lambda(t)| = 1$ для всех $t \in [t_0, \vartheta)$. Следовательно, либо $\lambda \notin (0,1)$, либо $u(t,x_0) = u(t,x_1)$ и тогда $x_0 = x_1$.

4. Структура расширенного множества управляемости. Введем обозначение $\tau_n = \vartheta$ и для каждого $k = 0,1,\ldots,n$ и любого $t \in \mathbb{R}$ определим многообразия $M^k(t)$, где $M^0(t) = \{0\}$, $M^k(t) = \{\tau = (\tau_{n-k+1},\ldots,\tau_n) : 0 < \tau_{n-k+1} < \cdots < \tau_n < \sigma(t)\}, k = 1,\ldots,n$ и многообразия $M^{1+k} = \mathbb{R} \times M^k(t)$. Всякой точке $p = (t,\tau) \in M^{1+k}$ поставим в соответствие точку $q = (t,x)$, где $x = 0$ при $k = 0$ и

$$x = x(p) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t+\tau_i}^{t+\tau_{i+1}} X(t,s)b(s)\,ds, \quad \tau_{n-k} = 0, \tag{11}$$

при $k \geqslant 1$.

Таким образом, для каждого k задана функция $p \to f(p) = q$ с областью определения M^{1+k} и областью значений $N_+^{1+k} \doteq f(M^{1+k})$ (в дальнейшем нижний индекс у N_+^1 опускаем). Так как $N_+^{1+k} = \mathbb{R} \times N_+^k(t)$, где $N^0(t) = \{0\}$, а для $k \geqslant 1$ множество $N_+^k(t)$ состоит из точек вида (11), то $N_+^k(t) \subset D_{\sigma(t)}(t)$. Поэтому, в силу принципа максимума Понтрягина и условия $\tau_n < \sigma(t)$, каждой точке $q = (t, x) \in N_+^{1+k}$ отвечает единственная точка $p = (t, \tau) \in M^{1+k}$, задающая (при $k \geqslant 2$) моменты переключений управления, переводящего (t, x) в $(t + \tau_n, 0)$ и оптимального в смысле быстродействия (при $k = 0$ оптимальное управление $\equiv 0$, а при $k = 1$ не имеет переключений). Доказательство этого факта аналогично доказательству свойства 1. Следовательно, существует функция $g : N_+^{1+k} \to M^{1+k}$ обратная к f. Проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 2, легко убедиться, что функция $q \to f^{-1}(q)$ непрерывна на N_+^{1+k}. Следовательно, f — гомеоморфизм многообразий M^{1+k} и N_+^{1+k}.

Далее, для f имеет место равенство $f(p+\delta p) = f(p)+df(p)\delta p+o(|\delta p|)$, где $df(p) = \mathrm{col}(1, 0, \ldots, 0)$ при $k = 0$, а для $k \geqslant 1$,

$$df(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \\ w_{n-k}(p) & w_{n-k+1}(p) & \ldots & w_n(p) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_{n-k}(p) &= \frac{\partial x(p)}{\partial t} = A(t)x(p) + b(t) + w_{n-k+1}(p) + \cdots + w_n(p), \\ w_i(p) &= \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_i} = 2(-1)^{i-n+k} X(t, t+\tau_i) b(t+\tau_i), \ i = n-k+1, \ldots, n-1, \\ w_n(p) &= \frac{\partial x(p)}{\partial \tau_n} = (-1)^k X(t, t+\tau_n) b(t, t+\tau_n). \end{aligned}$$

Можно показать (как это сделано при доказательстве свойства 3), что векторы $w_{n-k+1}(p), \ldots, w_n(p)$ линейно независимы при каждом фиксированном $p \in M^{1+k}$, поэтому столбцы матрицы $df(p)$ тоже линейно независимы. Следовательно $df(p)$ — изоморфизм пространства T_pM^{1+k}, касательного к многообразию M^{1+k} в точке p, в пространство $T_qN_+^{1+k}$, касательное к многообразию N_+^{1+k} в точке $q = f(p)$. Кроме того, функция $p \to df(p)$ принадлежит классу C^r и поэтому f — диффеоморфизм класса C^{r+1}. Следовательно, для каждого $k = 0, 1, \ldots, n$, многообразие N_+^{1+k} является гладким многообразием класса C^{r+1}.

Построенные многообразия N_+^{1+k} обладают тем свойством, что для точек $(t_0, x_0) \in N_+^{1+k}$ оптимальное (в смысле быстродействия) управление

$u_0(t) = +1$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau_{n-k+1}(t_0, x_0))$. Аналогичным образом строятся многообразия N_-^{1+k}, $k = 1, \dots, n$ (в этом случае оптимальное управление начинается с -1).

З а м е ч а н и е 1. Из (12) следует, что вектор скорости $v_+(q_0) \doteq \operatorname{col}(1, A(t_0)x + b(t_0))$ движения $t \to q(t) = (t, x(t))$, где $x(t)$ — решение системы (1) при управлении $u = 1$ и начальном условии $x(t_0) = x_0$, находится в пространстве $T_{q_0} N_+^{1+k}$, касательном к многообразию N_+^{1+k} в точке q_0.

Из приведенных построений следует, что многообразия N^1, N_-^{1+k} и $N_+^{1+k}, k = 1, \dots, n$, рассматриваемые как многообразия вложенные в $\mathbb{R}^{1+n}$, не имеют общих точек и многообразие $N_+^k \bigcup N_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} N_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} N_-^{1+k}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть система* (1) *докритическая. Тогда расширенное множество управляемости* $\mathfrak{D} \doteq \mathbb{R} \times D_{\sigma(t)}(t)$ *представимо в виде* $\mathfrak{D} = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$, *где*

$$\mathfrak{N}_+^{1+k} = N_+^{1+k} \bigcup N_-^k \bigcup N_+^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup N^1,$$

$$\mathfrak{N}_-^{1+k} = N_-^{1+k} \bigcup N_+^k \bigcup N_-^{k-1} \bigcup \cdots \bigcup N^1, \quad k = 0, \dots, n.$$

Многообразия $\mathfrak{N}_+^{1+k}$, $\mathfrak{N}_-^{1+k}$ *слабо инвариантны и для каждого* $k = 0, \dots, n$, *многообразие* $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ *является общим краем многообразий* $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+k}$ *и* $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства слабой инвариантности многообразий $\mathfrak{N}_+^{1+k}$ достаточно заметить, что для любой точки $q_0 = (t_0, x_0) \in N_+^{1+k}$ найдётся управление $u(t, q_0)$ (в качестве такого управления достаточно взять управление, оптимальное в смысле быстродействия) такое, что соответствующее ему решение системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ будет проходить через многообразия $N_-^k, N_+^{k-1}, \dots, N^1$ (см. замечание 1). Аналогично доказывается слабая инвариантность многообразий $\mathfrak{N}_-^{1+k}$. Далее, выше было показано, что многообразие $N_+^k \bigcup N_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} N_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} N_-^{1+k}$, $k = 1, \dots, n$; следовательно, для каждого $k = 0, \dots, n$ многообразие $\mathfrak{N}_+^k \bigcup \mathfrak{N}_-^k$ является общим краем многообразий $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+k}$ и $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_-^{1+k}$.

Докажем представимость $\mathfrak{D} = \operatorname{cl}\left(\mathfrak{N}_+^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_-^{1+n}\right)$. Пусть $q_0 \in \mathfrak{D}$. Тогда, в силу определения $\mathfrak{D}$, существует оптимальное в смысле быстродействия управление $u(t, q_0)$, приводящее решение системы (1) на многообразие N^1 за время $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$ и имеющее не более чем $n-1$ переключение. Следовательно, траектория указанного решения принадлежит либо $\operatorname{cl} \mathfrak{N}_+^{1+n}$, либо $\mathrm{cl}\,\mathfrak{N}_{-}^{1+n}$, в зависимости от положения точки q_0, и мы имеем включение $\mathfrak{D} \subset \mathrm{cl}\left(\mathfrak{N}_{+}^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_{-}^{1+n}\right)$. Обратно, пусть $q_0 \in \mathrm{cl}\, N_{+}^{1+n}$. Тогда существует оптимальное в смысле быстродействия управление $u(t, q_0)$, приводящее решение системы (1) на многообразие N^1 за время $\vartheta \leqslant \sigma(t_0)$. Проведя то же рассуждение для $q_0 \in \mathrm{cl}\, N_{-}^{1+n}$ получим включение $\mathrm{cl}\left(\mathfrak{N}_{+}^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_{-}^{1+n}\right) \subset \mathfrak{D}$, и, наконец, равенство $\mathfrak{D} = \mathrm{cl}\left(\mathfrak{N}_{+}^{1+n} \bigcup \mathfrak{N}_{-}^{1+n}\right)$. Теорема доказана.

5. Вектор быстродействия. Пусть точка $q_0 = (t_0, x_0) \in N_{+}^{1+n}$, тогда функция $f^{-1} : N_{+}^{1+n} \to M^{1+n}$, обратная к f (см.(11) при $k = n$) задает точку $p_0 = (t_0, \tau_1(q_0), \ldots, \tau_n(q_0)) \in M^{1+n}$, $0 < \tau_1(q_0) < \cdots < \tau_n(q_0)$. Оказывается (это будет доказано ниже), что для каждого $i = 1, \ldots, n$, число $\tau_i(q_0)$ является временем быстродействия ($\vartheta = \tau_i(q_0)$) в задаче о переводе точки $x_0 \in N_{+}^{n}(t_0)$ на многообразие $N_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta)$:

$$\vartheta(u(\cdot)) \to \min_{u(\cdot)}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{13}$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \vartheta, \tag{14}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + \vartheta) \in N_{\nu(i)}^{n-i}(t_0 + \vartheta), \tag{15}$$

где вместо $\nu(i)$ надо поставить знак "плюс", если i — четное и знак "минус", если i — нечетное число. Таким образом, вектор $\tau(q) = (\tau_1(q), \ldots, \tau_n(q))$ естественно называть *вектором быстродействия*.

Замечание 2. Мы определили вектор быстродействия на многообразии N_{+}^{1+n}. Поскольку множество $D_{\sigma(t)}(t)$ центрально симметрично, то фактически $\tau(q)$ определен на $N_{+}^{1+n} \bigcup N_{-}^{1+n}$ (действительно, из включения $x \in N_{+}^{n}(t)$ следует включение $-x \in N_{-}^{n}(t)$, причем $\tau_i(t, x) = \tau_i(t, -x)$). С учетом (15) доопределим $\tau(q)$ на все $\mathfrak{D}$, положив $\tau_i(q) = 0$ при $q \in \mathfrak{N}_{+}^{1+n-i} \bigcup \mathfrak{N}_{-}^{1+n-i}$ (для $i \in \{1, \ldots, n\}$, мера Лебега множества $\mathfrak{N}_{+}^{1+n-i} \bigcup \mathfrak{N}_{-}^{1+n-i}$ равна нулю).

Замечание 3. Пусть $q = (t, x) \in N_{+}^{1+n} \bigcup N_{-}^{1+n}$, $\tau(q) = (\tau_1(q), \ldots, \tau_n(q))$ — вектор быстродействия, $x_0(s)$, $t \leqslant s \leqslant t + \tau(q)$ — оптимальное решение задачи быстродействия в нуль, отвечающее начальной точке q. Тогда легко проверить, что для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$, имеют место равенства $\tau_i(t + \tau_1(q), x_0(t + \tau_1(q))) = \tau_i(q) - \tau_1(q)$.

Теорема 5. *Пусть система* (1) *докритическая. Обозначим* $(\widehat{u}(\cdot), \widehat{\vartheta}, \widehat{x}(\cdot))$ — *оптимальный процесс задачи* (13)-(15) *при некотором фиксированном* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда* $\widehat{\vartheta} = \tau_i(q_0)$ *и на интервале* $[t_0, t_0 + \tau_i(q_0))$ *оптимальное управление* $\widehat{u}(t)$ *и отвечающее ему оптимальное решение*

$\widehat{x}(t)$ *системы* (14) *совпадают с оптимальными управлением и решением задачи быстродействия в нуль (т.е. задачи* (13)-(15) *при* $i = n$*).*

Доказательство. Пусть $q_0 \in N_+^{1+n}$ и $(u(\cdot), \vartheta, x(\cdot))$ — допустимый процесс задачи (14), (15) при $i = 1$. Докажем, что $\vartheta \geqslant \tau_1(q_0)$. Доказательство разобъем на несколько пунктов.

А. Построим точку $p_0 = f^{-1}(q_0)$, где f^{-1} — отображение, обратное к f (см. (11) при $k = n$.) Тогда

$$x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0, t)b(t)dt, \tag{16}$$

где $\tau_0 = 0, \tau_i = \tau_i(q_0)$. Далее, поскольку $x(t_0 + \vartheta) \in N_-^{n-1}(t_0 + \vartheta)$, то найдется вектор $\theta = (\theta_2, \dots, \theta_n), 0 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ такой,что

$$x(t_0 + \vartheta) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1} \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\vartheta+\theta_{i+1}} X(t_0 + \vartheta, t)b(t)dt, \tag{17}$$

где $\theta_1 = 0$. Подставляя (16) и (17) в решение

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, s)b(s)u(s)ds,$$

после несложных преобразование получим равенства (n равенств)

$$2\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\tau_i} X(t_0, t)b(t)\,dt + (-1)^n \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_n}^{t_0+\tau_n} X(t_0, t)b(t)\,dt +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} X(t_0, t)b(t)(u(t) - 1)\,dt - 2\int\limits_{t_0+\vartheta}^{t_0+\tau_1} X(t_0, t)b(t)\,dt = 0. \tag{18}$$

Таким образом, каждому допустимому процессу задачи (14), (15) отвечает решение $w = (u(\cdot), \vartheta, \theta)$ системы уравнений (18); верно и обратное утверждение, поэтому решение w системы (18) тоже будем называть допустимым процессом задачи (14), (15). Очевидным допустимым процессом служит тройка $w^0 = (u^0(\cdot), \tau_1, \theta^0)$, где $u^0(t) = 1$ при $t \in [t_0, t_0 + \tau_1)$, $\theta^0 = (\tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_n - \tau_1)$.

Б. Пусть $\psi \in S^{n-1}$. Умножим равенства (18) скалярно на ψ и получившуюся слева функцию обозначим $F(w,\psi)$. Тогда

$$F(w,\psi) = \int\limits_{t_0}^{t_0+\vartheta} \xi(t)(u(t)-1)\,dt - 2\int\limits_{t_0+\vartheta}^{t_0+\tau_1} \xi(t)\,dt + \\ + 2\sum_{i=2}^{n-1}(-1)^i \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_i}^{t_0+\tau_i} \xi(t)\,dt + (-1)^n \int\limits_{t_0+\vartheta+\theta_n}^{t_0+\tau_n} \xi(t)\,dt, \quad (19)$$

где $\xi(t) = \psi X(t_0,t)b(t)$. Таким образом, для любого допустимого процесса w и любого $\psi \in S^{n-1}$ из (18) следует равенство $F(w,\psi)=0$.

Обозначим $O_\varepsilon(\tau_k)$ — ε–окрестность точки τ_k. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что окрестности $O_\varepsilon(\tau_k)$ не пересекаются (при различных $k \in \{1,\dots,n\}$) и $\tau_n + \varepsilon < \sigma(t_0)$.

Допустимый процесс $w^\varepsilon = (u^\varepsilon(\cdot), \vartheta^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ назовем *близким к* w^0, если $\vartheta^\varepsilon \in O_\varepsilon(\tau_1), \vartheta^\varepsilon + \theta_k^\varepsilon \in O_\varepsilon(\tau_k),\ k = 2,\dots,n$. Тогда $\vartheta^\varepsilon + \theta_n^\varepsilon < \sigma(t_0)$. Для близкого к w^0 допустимого процесса найдутся: набор точек $\eta_1 < \dots < \eta_{n-1}$, разделяющих интервалы $O_\varepsilon(\tau_k)$ (причем $\tau_1 + \varepsilon < \eta_1,\dots,\eta_{n-1} < \tau_n - \varepsilon$) и функция $\xi(t) = \psi X(t_0,t)b(t)$, сохраняющая знак на интервалах $(t_0, t_0+\eta_1), (t_0+\eta_1, t_0+\eta_2), \dots, (t_0+\eta_{n-1}, t_0+\sigma(t_0))$ (содержащих внутри себя интервалы $O_\varepsilon(t_0+\tau_k)$) и удовлетряющая неравенствам: $\xi(t) > 0$ при $t \in (t_0, t_0+\eta_1)$,

$$(-1)^k \int\limits_{t_0+\vartheta^\varepsilon+\theta_k^\varepsilon}^{t_0+\tau_k} \xi(t)\,dt \leqslant 0, \quad k = 2,\dots,n$$

(функция $\xi(t)$ имеет не более $n-1$ нулей).

Если неравенство $\vartheta^\varepsilon < \tau_1$ имеет место для близкого к w^0 процесса w^ε (это означает, что w^0 — не оптимальный процесс), то, в силу выбора $\xi(t)$, выполнено неравенство $F(w^\varepsilon,\psi) < 0$. Поэтому $\vartheta^\varepsilon \geqslant \tau_1$ и мы показали, что w^0 — оптимальный процесс среди всех допустимых процессов, близких к процессу w^0.

В. Обозначим $\widehat{w} = (\widehat{u}(\cdot), \widehat{\vartheta}, \widehat{\theta})$ — оптимальный процесс задачи (13)-(15) при $i = n$. Покажем тогда, что если $\widehat{\vartheta} < \tau_1$, то найдется близкий к w^0 допустимый процесс w^ε такой, что $\vartheta^\varepsilon < \tau_1$. С этой целью докажем следующую лемму.

Л е м м а 2. *Точка $(t, x^0(t))$ при движении $t \to (t, x^0(t))$, отвечающем допустимому процессу w^0, входит в многообразие N_-^n трансверсально.*

Надо доказать, что вектор $v_1 = \mathrm{col}(1, \dot{x}^0(t_1))$, касательный к движению $t \to (t, x^0(t))$ в точке $q_1 = (t_1, x^0(t_1)) \in N_-^n$, где $t_1 = t_0 + \tau_1$, не лежит в пространстве $T_{q_1} N_-^n$, касательном к многообразию N_-^n.

По точке q_1 построим точку $p_1 = f^{-1}(q_1)$; здесь f^{-1} — функция, обратная к f (см. (11), где надо положить $k = n-1$ и "минус"перед знаком суммы заменить на "плюс"). Тогда $p_1 = (t_1, \theta)$, где $\theta = (\theta_2, \ldots, \theta_n)$, причем $\theta_i = \tau_i - \tau_1$ (см. замечание 3). Из построения следует, что

$$x^0(t_1) = x(p_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \int\limits_{t_1+\tau_i}^{t_1+\tau_{i+1}} X(t_1, t) b(t)\, dt, \quad \theta_1 = 0. \tag{20}$$

Таким образом, вектор скорости v_1 в точке q_1 равен $\mathrm{col}(1, A(t_1)x(p_1) + b(t_1))$. Далее, с учетом (19) и равенства (12) (в котором надо внести понятные изменениями, связанные с заменой многообразия N_+^{1+k} на многообразие N_-^n) несложно убедиться, что векторы

$$l_1(q_1) = \mathrm{col}(1, A(t_1)x(p_1) - b(t_1)),$$

$$l_i(q_1) = \mathrm{col}(0, X(t_1, t_1 + \theta_i) b(t_1 + \theta_i)), \quad i = 2, \ldots, n,$$

образуют базис в $T_{q_1} N_-^n$.

Если вектор v_1 лежит в $T_{q_1} N_-^n$, то найдутся константы $c_1, \ldots, c_n$, не равные нулю одновременно такие, что $v_1 = c_1 l_1(p_1) + \cdots + c_n l_n(p_1)$. Следовательно $c_1 = 1$ и поэтому

$$2b(t_1) = c_2 X(t_1, t_1 + \theta_2) b(t_1 + \theta_2) + \cdots + c_n X(t_1, t_1 + \theta_n) b(t_1 + \theta_n).$$

Проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 3, можно убедиться, что линейная зависимость векторов $X(t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_i) b(t_0 + \tau_i), i = 1, \ldots, n$, противоречит условию $\tau_n(q_0) < \sigma(t_0)$. Лемма 2 доказана.

Г. Построим управление $u_\lambda(\cdot) = \lambda(\widehat{u}(\cdot) - 1) + 1$, где $\lambda \in [0, 1]$. Обозначим $G(\lambda, \varrho)$ левую часть равенств (18) при $u(t) = u_\lambda(t), \varrho = (\vartheta, \theta)$. В силу того, что матрица $\partial G(\lambda, \varrho)/\partial \varrho$ невырожденна для всех $\lambda \in [0, 1]$, система уравнений $G(\lambda, \varrho) = 0$ относительно ϱ имеет непрерывное решение $\varrho = \varrho(\lambda)$, причем $\varrho(0) = (\tau_1, \theta^0), \varrho(1) = (\widehat{\vartheta}, \widehat{\theta})$. Следовательно, для каждого $\lambda \in [0, 1]$ существует допустимый процесс $w_\lambda = (u_\lambda(\cdot), \vartheta(\lambda), \theta(\lambda))$ и при λ

близких к нулю, процесс w_λ близок к w^0. Кроме того, $\widehat{\vartheta} < \vartheta(\lambda) < \tau_1$, при $\lambda \in (0,1)$, что противоречит ранее доказанному. Теорема доказана.

6. Дифференцируемость вектора быстродействия. Пусть $\tau(q) = (\tau_1(q), \dots, \tau_n(q))$ — вектор быстродействия системы (1). Напомним (см. п. 1), что производной $d\,\tau_i(q_0)$ функции $\tau_i \colon N_+^{1+k} \to \mathbb{R}$ в точке q_0 вдоль направления, заданного вектором $w \in T_{q_0} N_+^{1+k}$, называется линейное отображение $d\,\tau_i(q_0) \colon T_{q_0} N_+^{1+k} \to \mathbb{R}$, определенное равенством

$$d\,\tau_i(q_0)\,w \mathrel{\hat{=}} \frac{d\,\tau_i(q(\varepsilon))}{d\,\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0},$$

где $q(\varepsilon)$ — класс эквивалентности гладких кривых $q : (-1,1) \to N_+^{1+k}$, обладающих следующими свойствами: $q(0) = q_0$, $d\,q(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = w$. Аналогично определяется производная $d^s\tau_i$ порядка s:

$$d^s\tau_i(q_0)\,(w_1, \dots, w_s) \mathrel{\hat{=}} \frac{d^s\tau_i(q(\varepsilon))}{d\varepsilon^s}\Big|_{\varepsilon=0}, \tag{21}$$

где $q : (-1,1) \to N_+^{1+k}$ — класс эквивалентности гладких кривых вида $q(\varepsilon) = q_0 + \varepsilon\,w_1 + \frac{1}{2!}\varepsilon^2\,w_2 + \dots + \frac{1}{s!}\varepsilon^s\,w_s + o(\varepsilon^s)$. Функция $q \to \tau_i(q)$ принадлежит классу C^s на многообразии $N_+^{1+k} \bigcup N_-^{1+k}$, если для всякой C^s кривой $q \colon (-1,1) \to N_+^{1+k} \bigcup N_-^{1+k}$ функция $\varepsilon \to \tau_i(q(\varepsilon))$ из класса C^s. Отметим еще, что пространство C^s-функций $q \colon (-1,1) \to N_+^{1+k}$, проходящих через точку $q_0 = q(0)$, исчерпывается следующим набором: $q(\varepsilon) = (t(\varepsilon), x(p(\varepsilon))$, где $p(\varepsilon) = (t(\varepsilon), \tau(\varepsilon)) \in M^{1+k}$ — произвольная C^s-функция, проходящая через точку $p_0 = f^{-1}(q_0)$,

$$x(p(\varepsilon)) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t(\varepsilon)+\tau_i(\varepsilon)}^{t(\varepsilon)+\tau_{i+1}(\varepsilon)} X(t(\varepsilon), s) b(s)\,ds, \quad \tau_{n-k} = 0.$$

Т е о р е м а 6. *Пусть система* (1) *докритическая и функции* $A \colon \mathbb{R} \to \mathrm{End}\,(\mathbb{R}^n)$, $b \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *принадлежат классу* C^r. *Тогда для каждого* $k = 0, \dots, n$ *функции* $\tau_i \colon N_+^{1+k} \bigcup N_-^{1+k} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, *принадлежат классу* C^{r+1}. *В частности,* τ_i *непрерывно дифференцируемы* $r+1$ *раз на* $N_+^{1+n} \bigcup N_-^{1+n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В пункте 4 доказано, что отображение $f^{-1} : N_+^{1+n} \to M^{1+k}$, $k = 0, \dots, n$, обратное k отображению f, заданному равенством (11), является диффеоморфизмом класса C^{r+1}. Следовательно, кривая $\varepsilon \to p(\varepsilon) = (t(\varepsilon), \tau(q(\varepsilon))) \in M^{1+k}$ представляет собой $r+1$ раз непрерывно дифференцируемую функцию аргумента ε в точке $\varepsilon = 0$, откуда, в силу определения (20), следует, что функция $q \to \tau_i(q)$ непрерывно дифференцируема $r+1$ раз в каждой точке $q_0 \in N_+^{1+n}$. Повторив те же рассуждения для многообразий N_-^{1+k}, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

7. Позиционное управление, оптимальное в смысле быстродействия. Пусть функция $q \to u(q)$, где $q \mathrel{\mathring{=}} (t, x)$, определена на внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$, принимает значения в $U = [-1, +1]$ и суперпозиционно измерима. *C-решением* (решением в смысле Каратеодори) системы уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t, x), \tag{22}$$

называется всякая абсолютно-непрерывная функция $t \to x(t)$, удовлетворяющая при всех t равенству

$$x(t) = X(t, t_0)\, x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t, s) b(s) u(s, x(s))\, ds,$$

где t_0 — произвольный фиксированный момент времени. Основным недостатком C-решений является их сильная чувствительность к изменениям функции $u(q)$ на множествах меры нуль. Этого недостатка лишены *F-решения* (решения в смысле А.Ф. Филиппова [9, с.40]). Кроме того, F-решения наиболее приспособлены для описания прикладных задачах, допускающих моделирование с помощью дифференциальных уравнений с разрывными по фазовым координатам правыми частями.

Для определения решений в смысле Филиппова построим многозначную функцию

$$q \to F(q) \mathrel{\mathring{=}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\operatorname{mes} \mu = 0} \overline{\operatorname{conv}}\, u(O_\varepsilon(q) \setminus \mu), \quad q \in \operatorname{int} \mathfrak{D}, \tag{23}$$

где $O_\varepsilon(q)$ — ε-окрестность точки q, μ — произвольное множество в $\mathbb{R}^{1+n}$, мера Лебега $\operatorname{mes} \mu$ которого равна нулю, $\overline{\operatorname{conv}}\, Q$ — замыкание выпуклой оболочки множества Q. F-решением системы (21) называется всякая абсолютно-непрерывная функция $t \to x(t)$, удовлетворяющая при почти всех t дифференциальному включению

$$\dot{x} \in A(t)\, x + b(t)\, F(t, x).$$

Суперпозиционно измеримую функцию $u_c : \mathfrak{D} \to U$ будем называть *оптимальным в смысле быстродействия позиционным C-управлением* (сокращенно оптимальным C-управлением), если для любой точки $q_0 \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$, C-решение $x(t, q_0)$ задачи

$$\dot{x} = A(t)\,x + b(t)\,u\,, \;\; x(t_0) = x_0, \tag{24}$$

при $u = u_c(q)$, существует на полуоси $[t_0, \infty)$, единственно, обращается в нуль в точке $t = t_0 + \tau_n(q_0)$ $\quad(\tau_n(q_0)$ — время быстродействия) и $x(t, q_0) \equiv 0$ для $t > t_0 + \tau_n(q_0)$.

Аналогично определяется *оптимальное в смысле быстродействия позиционное F-управление* (сокращенно оптимальное F-управление). В этом случае функция $q \to u_f(q)$ должна быть определена для почти всех (в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{1+n}$) точек $q \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$ и обеспечивать следующее свойство: каждому $q_0 \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$ отвечает единственное F-решение $x(t, q_0)$ задачи (23) с управлением $u = u_f(q)$ и $x(t, q_0) \equiv 0$ для $t \geqslant t_0 + \tau_n(q_0)$. Подчеркнем еще раз, что в силу определения F-решений, для построения оптимального F-управления нет необходимости определять $u_f(q)$ в каждой точке внутренности расширенного множества управляемости $\mathfrak{D}$; достаточно построить $u_f(q)$ на множестве полной меры.

Известны примеры (см., например, [10], [11]) следующего аномального поведения линейных управляемых систем: оптимальное C-управление существует и единственно, но оптимальное F-управление отсутствует. Этот эффект возникает (даже для линейных стационарных систем) в том случае, когда оптимальное C-управление (которое однозначно находится из принципа максимума Л.С. Понтрягина) определяет на поверхностях разрыва (имеющих нулевую меру Лебега) вектор скорости, не совпадающий с вектором скорости, задаваемом конструкцией Филиппова (22).

Т е о р е м а 7. *Пусть система* (1) *докритическая. Тогда функция*

$$u_c(q) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q \in N_+^{1+k} \quad \text{при некотором} \quad k \in \{1, \ldots, n\} \\ 0, & \text{если} \quad k = 0 \\ -1, & \text{если} \quad q \in N_-^{1+k} \quad \text{при некотором} \quad k \in \{1, \ldots, n\} \end{cases} \tag{25}$$

доставляет оптимальное C-управление, а функция

$$u_f(q) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad q \in N_+^{1+n} \\ -1, & \text{если} \quad q \in N_-^{1+n} \end{cases} \qquad q \in \operatorname{int}\mathfrak{D} \tag{26}$$

— оптимальное F-управление.

Д о к а з а т е л ь с т в о разобъем на несколько пунктов.

А. Пусть $q_0 \in \operatorname{int}\mathfrak{D}$. Предположим для определенности, что $q_0 \in N_+^{1+k}$ при некотором $k \in \{1, \dots, n\}$ (при $k = 0 \quad x(t, q_0) \equiv 0$). По точке q_0 построим точку $p_0 = (t_0, \tau)$, где $\tau = (\tau_{n-k+1}, \dots, \tau_n), \tau_i = \tau_i(q_0)$, задает моменты переключений программного управления $u_0(t)$, оптимального в смысле быстродействия. Управлению $u_0(t)$ отвечает оптимальное решение $x_0(t)$ системы (23), причем (см.(11))

$$x_0 = x_0(t_0) = -\sum_{i=n-k}^{n-1} (-1)^{i-n+k} \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t_0, s)b(s)\,ds, \quad \tau_{n-k} = 0,$$

Б. Покажем, что C-решение $x(t, q_0)$ задачи (23) при $u = u_c(q)$ существует, единственно и совпадает (при почти всех t) с решением $x_0(t)$. Так как $q_0 \in N_+^{1+k}$, то $u_c(q_0) = 1$ и вектор скорости

$$v_+(q) \mathrel{\hat{=}} \operatorname{col}(1, A(t)x + b(t)u_c(q))$$

при $q = q_0$ находится в пространстве $T_{q_0}N_+^{1+k}$ касательном к N_+^{1+k} в точке q_0. При t близких к t_0 включение $v_+(q(t)) \in T_{q(t)}N_+^{1+k}$, где $q(t) = (t, x(t, q_0))$, сохраняется (так как N_+^{1+k} — многообразие без края), поэтому C-решение $x(t, q_0)$ при t близких к t_0 существует, единственно, совпадает с $x_0(t)$ и

$$x(t, q_0) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t, s)b(s)\,ds \;-\; \int\limits_{t_0}^{t_0+\tau_{n-k+1}} X(t, s)b(s)\,ds +$$
$$+ \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k+1} \int\limits_{t_0+\tau_i}^{t_0+\tau_{i+1}} X(t, s)b(s)\,ds. \quad (27)$$

Из (26) следует,что включение $v_+(q(t)) \in T_{q(t)}N_+^{1+k}$ имеет место при всех $t \in I_1 \mathrel{\hat{=}} [t_0, t_1)$, где $t_1 = t_0 + \tau_{n-k+1}$, поэтому $x(t, q_0) \in N_+^k(t)$ при $t \in I_1$. Отметим далее, что

$$v_-(q(t)) \mathrel{\hat{=}} \operatorname{col}(1, A(t)x - b(t)) \notin T_{q(t)}N_+^{1+k},$$

$t \in I_1$ (см. лемму 2 внутри доказательства теоремы 5). В момент времени $t = t_1$ картина меняется: $v_+(q(t_1)) \notin T_{q(t_1)}N_+^{1+k}$, а вектор $v_-(q(t_1))$ касается многообразия N_-^k (являющегося краем многообразия $\operatorname{cl} N_+^{1+k}$). Поэтому

C-решение $x(t, q_0)$ в момент времени t_1 покидает многообразие $N_+^k(t)$ и переходит на многообразие $N_-^{k-1}(t_1)$. Действительно, из (26) имеем:

$$x(t_1, q_0) = + \sum_{i=n-k+1}^{n-1} (-1)^{i-n+k+1} \int\limits_{t_1+\theta_i}^{t_1+\theta_{i+1}} X(t_1, t) b(t)\, dt,$$

где $\theta_i = \tau_i - \tau_{n-k+1}, i = n-k+1, \ldots, n$, поэтому $x(t_1, q_0) \in N_-^{k-1}(t_1)$ и следовательно, $q(t_1) \in N_-^k$. Поскольку для всех t близких к t_1 и удовлетворяющих неравенству $t \geqslant t_1$, имеет место включение $v_-(q(t)) \in T_{q(t)} N_-^k$ (см. (24)), то $x(t, q_0)$ некоторое время остается на многообразии N_-^k и поэтому является классическим решением системы $\dot{x} = A(t)x - b(t)$. Потери единственности в точке t_1 не происходит, поскольку C-решение $x(t, q_0)$ однозначно "сшивается"из двух классических решений. Таким образом, C-решение $x(t, q_0)$ совпадает с $x_0(t)$ при $t \in [t_0, t_2)$, где $t_2 = t_1 + \theta_{n-k+2} = t_0 + \tau_{n-k+1}$.

Из приведенных рассуждений следует, что C-решение существует, единственно и обращается в нуль при достаточно больших t (при $t = t_0 + \tau_n(q_0)$).

Построим функцию $u_1(t) = u_c(t, x(t, q_0))$, где $x(t, q_0)$ — C-решение. Функция $u_1(t)$ принимает два значения ($+1$ или -1), имеет переключения только в точках $t = t_0 + \tau_i(q_0), i = n-k+1, \ldots, n$ и решение $x_1(t)$ задачи (23) при $u = u_1(t)$ совпадает с C-решением $x(t, q_0)$. Следовательно, $u_1(t)$ — программное управление, оптимальное в смысле быстродействия для задачи (23). Поэтому, в силу единственности оптимального управления, имеют место равенства: $u_1(t) = u_0(t), x_1(t) = x_0(t)$. Поэтому $u_c(q)$ — оптимальное C-управление.

B. Покажем, что всякое F-решение системы $\dot{x} = A(t)\, x + b(t)\, u_f(t, x)$, где $u_f(q)$ определено равенством (25), является C-решением системы $\dot{x} = A(t)\, x + b(t)\, u_c(t, x)$. С этой целью построим для $u_f(q)$ многозначную функцию $q \to F(q)$, определенную равенством (22). Легко убедиться, что $F(q) = 1$, если $q \in N_+^{1+n}$, $F(q) = -1$, если $q \in N_-^{1+n}$ и $F(q) = [-1, 1]$, если $q \in S$, где $S = \mathfrak{D} \setminus (N_+^{1+n} \bigcup N_-^{1+n})$ (отметим, что $\operatorname{mes} S = 0$). Если $q_0 \in N_+^{1+n} \bigcup N_-^{1+n}$, то F-решение совпадает с C-решением при всех $t \in [t_0, t_1)$.

Пусть $q_0 \in S$ (для определенности будем считать, что $q_0 \in N_+^{1+k}$ при некотором $k = 0, \ldots, n-1$). Тогда, согласно конструкции Филиппова, вектор скорости направляющий движение $t \to q(t)$ в точке t_0, одновременно находится в множестве $V(q_0) \overset{\circ}{=} \operatorname{col}(1, A(t_0)x_0 + b(t_0)U)$

и касательном пространстве $T_{q_0}N_+^{1+k}$. Покажем,что только один вектор $v_+(q_0) = \mathrm{col}\,(1, A(t_0)x_0 + b(t_0))$ содержится в пересечении $V(q_0) \bigcap T_{q_0}N_+^{1+k}$. Действительно, если при некотором $\lambda \in [-1, 1)$, вектор

$$v_\lambda(q_0) = \mathrm{col}\,(1, A(t_0)x_0 + b(t_0)\lambda)$$

лежит в $T_{q_0}N_+^{1+k}$, то $v_\lambda(q_0)$ можно разложить по базису $l_1(q_0)$, $l_i(q_0)$, $i = n-k+1, \dots, n$, касательного пространства $T_{q_0}N_+^{1+k}$ (см. доказательство леммы 2). Тогда, проведя рассуждения, аналогичные доказательству свойства 3, получим противоречие с условием $\tau_n(q_0) < \sigma(t_0)$.

Таким образом, вектор скорости F-решения в любой точке $q_0 \in N_+^{1+k}$ совпадает с вектором скорости C-решения, Поэтому F-решение совпадает с C-решением. Теорема доказана.

Список литературы

1. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985, 335 с.
2. Палис Ж., ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем.М.: Мир, 1986, 301 с.
3. Родионова А.Г.,Тонков Е.Л. О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае //Изв. ВУЗ-ов. Математика, 1993, №5 (372), С. 101-111.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479 с.
5. Тонков Е.Л. Неосцилляция и число переключений в линейной системе, оптимальной по быстродействию //Дифференц. уравнения. 1973. Т.9, №12, С. 2180-2185.
6. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973, .
7. Боднер В.А. Теория автоматического управления полетом. М.: Наука, 1964.
8. Тонков Е.Л. Неосцилляция и структура множества управляемости линейного уравнения //Успехи матем.наук. 1983, Т. 38, №4, С. 131.
9. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985, 223 с.
10. Brunovski P. Regular synthesis and singular extremas// Lect. Contr. and Inform. Sci. 1980, V.22, P.280-284.
11. Brunovski P. Existence of regular synthesis for general control problems// J. Different. Equat., 1980, V.38, №3, P.317-343.